

加速度が変化するものの移動計算（時間・距離・速度）

($M \gg m$ の場合：M が動かないとした場合)

ケプラーの法則を理解するには、楕円と重力の理解が必要なのだが、結果は知っていても数学的にトライしたことはない。ある質量を持つ質体 M 環境にある方向と速度で質体 m を投入すれば質体 M が動かないとして質体 m が楕円運動を開始するのはわかる。ところが、それには重力の振る舞いや時間との関係などを理解しなければならない。

それが発端で、いろいろやり始めた。まず、ある長さの糸の両端をたるませて固定し、今度は糸を張りながら、その先端を動かした時に楕円になるかを試してみた。これは計算でそのようになることを容易に確認できた。しかし、重力計算で軌道が楕円となることにトライしたいということで、まずは質体 M に重力により自然落下する運動を理解しようとしたわけである。

定加速度を有するものの移動距離と時間の関係は簡単である。 $X = V_0 t + (1/2) a t^2$ でよい。ところが、加加速度を有するものの計算となるとちょっとやっかいである。今、質量 M と m の質点が距離 L で存在している場合の距離 L と時間 t の関係を求めようとしてる。重力でやろうとしているのだが、これは電気のクーロン力や磁力なども同じで、近寄れば近寄るほど加速度が増し、近接すれば加速度無限大に近づくというものである。ブラックホール（質量極大）や量子力学（小さな粒子の近接で距離零）ではこんなことも起こるのかも知れない。

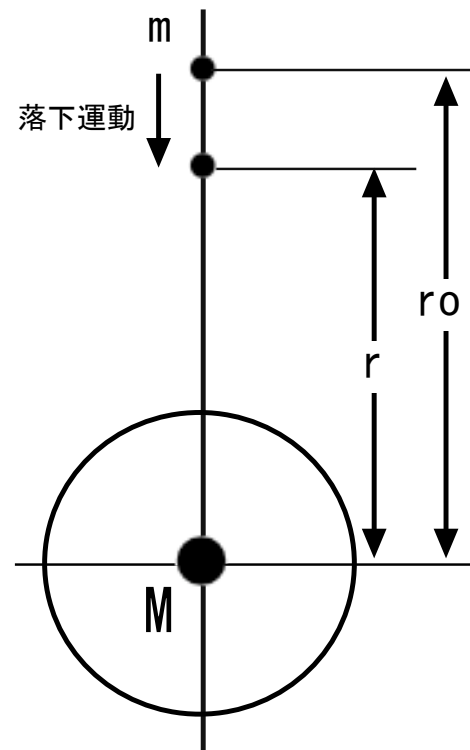
例えば

- (1) 重力の影響下で、ある時間後の、速度や移動距離などとの関係を調べようとする、ある時間後に重力点に近づいている分だけ、重力は距離の二乗に反比例して大きくなっていて加速度に一定の値を使えないからである。
- (2) 重力がどれだけ大きくなっているのかは、近づいた距離でわかる。近づいた距離というものは、経過時間でわかるはずである。
- (3) すべて、ある時間経過後の距離と重力はすべて時間の関数になるはずであるが、この関係というものを明確にするのが、初心者にはわからないものである。
- (4) リーマン和のようなものを利用して、マイクロソフト・エクセルなどで計算してみれば精度はともかくとして、簡単にわかる（と言っても、私の場合には勘違い・桁違い・元違いなどして結構時間がかかった）。
- (5) 当初は、加速度をベースにしてここからやってみようとしたのだが、どうもうまく行かない。高度な数学を使わないと出来ないものかも知らなかった。
- (6) その後、インターネットで調べていると、加加速度から考えるより、ポテンシャルエネルギーから考えるのが一番簡単そうであることがわかり、これでやってみることにした。
- (7) 結果は、参考の通りになったので、ある程度は納得できた。

《計算の条件》

質点 M と m がある。M>>m として M は移動しないものとする。当初距離は r₀ である。この距離が r₀→r と変化して行くとき、時間・距離・速度の関係を調べるものである。ただ、この式が成り立つのは m が M の表面に達するまでである。

運動式とポテンシャルエネルギーの関係から (v₀ は初速度)、



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \quad \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = E = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{r_0}$$

$$v_0 = 0 \quad v^2 = -2GM\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = 2GM\left(\frac{r_0 - r}{r_0 \cdot r}\right) = \frac{2GM}{r_0}\left(\frac{r_0 - r}{r}\right) \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} = \frac{dr}{dt} \quad (a1)$$

(a1)で時間、速度、距離の関係が出てくる。ただ、ポテンシャルエネルギーを理解する必要がある。例えば、地表での位置のエネルギーなどと言うと、E=g (重力) ×m (質量) ×H (高さ) となるのだが、同じものである。

ただ、ここで意識しておかなければならないことは、ここでは M>>m としていることである。式 (a1) の誘導において、M は動かない前提が M>>m を示している。

$$\frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{r_0}} = \alpha \quad \frac{dr}{dt} = v = \alpha \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1} \quad \frac{1}{\alpha \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} \cdot dr = dt \quad \frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} \cdot dr = \int dt = t \quad (a2)$$

これでは、単純に積分は出来そうもないので $r = r_0 \cos^2 \theta$ と置き換え置換積分する。このように置き換えの当てはめは経験などに依るものだろうが、ある程度結果がわかっていることによりわかるものだろうが、 r_0/r や $\sqrt{\quad}$ などが出てくる場合には、何とか $\sqrt{\quad}$ をはずしてしまいたいことから思いつくのだろう。

$$r = r_0 \cdot \cos^2 \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r_0 \cdot \cos^2 \theta}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \frac{dr}{d\theta} = -2r_0 \cdot \sin \theta \cos \theta \quad dr = -2r_0 \cdot \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta$$

$$\frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}} \cdot dr = \frac{1}{\alpha} \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-2r_0 \cdot \sin \theta \cos \theta) \cdot d\theta = \frac{-2r_0}{\alpha} \int \cos^2 \theta \cdot d\theta = \frac{-r_0}{\alpha} \int (\cos 2\theta + 1) \cdot d\theta$$

以上をベースにすれば、積分は下記のようになる。

$$\int dt = t = \frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}} \cdot dr = \frac{-r_0}{\alpha} \int (\cos 2\theta + 1) \cdot d\theta \quad r = r_0 \cdot \cos^2 \theta \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad \therefore \pi/2 \geq \theta \geq 0$$

$$t = \frac{-r_0}{\alpha} \int_{\pi/2}^0 (\cos 2\theta + 1) \cdot d\theta = \frac{-r_0}{\alpha} \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right]_{\pi/2}^0 = \frac{r_0}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{r_0}{\frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{r_0}}} \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}} \cdot \pi \quad (b1)$$

(b1) で π が出てくるのは不思議なことである。(b1) は参考資料で確認されているものであるから間違いはないだろう。

(b1) は r を $0 \sim r_0$ まで変化させたときであるが、途中までとすると、

$$t = \frac{-r_0}{\alpha} \int_{\theta}^0 (\cos 2\theta + 1) \cdot d\theta = \frac{-r_0}{\alpha} \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right]_{\theta}^0 = \frac{r_0}{\alpha} \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right] = \frac{r_0}{\frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{r_0}}} \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right] = \sqrt{\frac{r_0^3}{2GM}} \cdot \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right] \quad (b2) \quad \text{となる。}$$

以上整理すると、下記のようになる。

$$t = \sqrt{\frac{r_0^3}{2GM}} \cdot \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right] \quad (1)$$

$$r = r_0 \cdot \cos^2 \theta \quad (2)$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \sqrt{\frac{r_0(1 - \cos^2 \theta)}{r_0 \cdot \cos^2 \theta}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \cdot \tan \theta \quad (3)$$

(3) 式のように速度と距離の関係は直結する (Potential だから当然)。時間とその他は直結しない。

最も、 $r = r_0 \cos^2 \theta$ と置換したので、 $\theta = \sqrt{\cos^{-1}\left(\frac{r}{r_0}\right)}$ とでもすれば、 θ を消すこともできる。

ただし、冒頭に示したように、

$$r_0 \geq r \geq r_0 - r_M \quad r_0 \geq r = r_0 \cos^2 \theta \geq r_0 - r_M \quad 1 \geq \cos^2 \theta \geq 1 - \frac{r_M}{r_0} \quad 1 \geq \cos \theta \geq \sqrt{1 - \frac{r_M}{r_0}} \quad \cos^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{r_M}{r_0}}\right) \geq \theta \geq 0 \quad \text{となる。}$$

マイクロソフト・エクセルで計算する場合には、 θ を列としてやって行けばよいだろう。

ここでは、初速度は考慮していない。それがある場合は、容易に理解可能と思うからである。

これと、極座標による球殻の重力計算をやって「球の内部に入ると、表面方向の部分の質量の影響は受けなくて、中心方向の質量の影響だけ受ける」と言うことがわかった。ある期間経過して気付いたことなのだが、**これまで誘導してきた式というものは「質量 M と m が接するまで ($r > \text{球半径}$) で成り立つ」ということであって、接した以降は成り立たないということである。**

実際問題として、M が地球、m が小惑星などであれば、衝突した瞬間に飛び散ってしまうだろう。しかし、もし地球に垂直に裏まで貫通している穴があり、小惑星がこの穴を地球に接触せず通過するような場合には、穴の部分の式は別物となる、ということである。この穴に初速度 0 で人間が落ちた場合には (空気抵抗など無いものとすれば) 地球の裏側まで行って、またこちらに戻って来ると言う運動を繰り返す。しかも、加速度は落ちた瞬間が最も大きく、中心では零となり、徐々にマイナスとなっていく、上側で最大のマイナス (速度 0) となる、とこんな事がわかる。