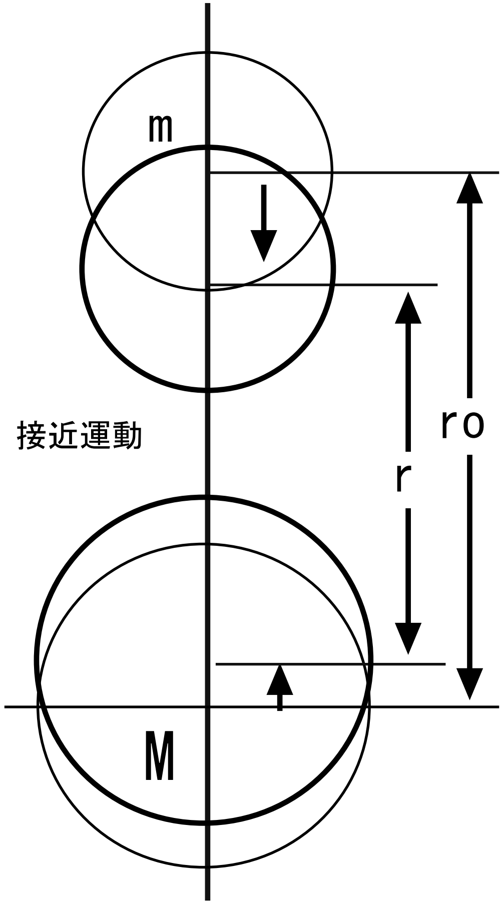
加速度が変化するものの移動計算（時間・距離・速度）

（双方の質量を考えるとき）



物体 M,m がある距離 r0 で存在し、初速度 0 から万有引力によって近接してゆく現象を考えよう。
物体 M について、質量 M、速度 VM、
物体 m について、質量 m、速度 Vm
としておこう。

物体 M から見た m のポテンシャルエネルギーは-GMm/r0 である。一方、物体 m から見ても-GMm/r0 である。
もし、万有引力により運動を開始し、これが r の距離になったとき

$$\frac{1}{2}\left(MV_M{}^2 + mV_m{}^2\right) = E = GMm\left(-\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right) = GMm \cdot \frac{r_0 - r}{r_0 r}$$

が成立するはずである。

$$MV_M{}^2 + mV_m{}^2 = 2GMm \cdot \frac{r_0 - r}{r_0 r} \cdots (1)$$

VM と Vm のある距離 r での各々の速度や、それまでに要する時間 t を知りたいのだが、これだけでは知ることはできない。相互間に働いている力は〔力 F = 質量 X 加速度〕であるので、

$$F = \frac{GMm}{r^2} = M\frac{dV_M}{dt} = m\frac{dV_m}{dt} \cdots (2)$$（作用反作用の法則により）

$$M\frac{dV_M}{dt} = m\frac{dV_m}{dt} \qquad M\int\frac{dV_M}{dt}dt = MV_M = m\int\frac{dV_m}{dt}dt = mV_m \qquad MV_M = mV_m \cdots (3)$$

であることがわかる（初速は 0 としている）。

(3)を(1)に代入すると、r0→r まで移動したときの各々の速度は、

$$MV_M{}^2 + mV_m{}^2 = MV_M{}^2 + m\left(\frac{MV_M}{m}\right)^2 = 2GMm\cdot\frac{r_0 - r}{r_0 r} \qquad M\left(1+\frac{M}{m}\right)V_M{}^2 = 2GMm\cdot\frac{r_0 - r}{r_0 r} \qquad \left(1+\frac{M}{m}\right)V_M{}^2 = 2Gm\cdot\frac{r_0 - r}{r_0 r}$$

$$V_M{}^2 = \frac{2Gm\cdot\dfrac{r_0 - r}{r_0 r}}{1+\dfrac{M}{m}} = \frac{2Gm^2\cdot\dfrac{r_0 - r}{r_0 r}}{M+m}$$

となる。

$$V_M = \frac{m}{\sqrt{M+m}}\sqrt{2G}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\cdots(3a) \qquad V_m\left(=\frac{M}{m}\cdot V_M = \frac{M}{m}\cdot\frac{m}{\sqrt{M+m}}\sqrt{2G}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\right) = \frac{M}{\sqrt{M+m}}\sqrt{2G}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\cdots(3b)$$

相対速度は

$$V = V_M + V_m = \frac{m\sqrt{2G}}{\sqrt{M+m}}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}} + \frac{M\sqrt{2G}}{\sqrt{M+m}}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}} = \frac{(M+m)\sqrt{2G}}{\sqrt{M+m}}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}} = \sqrt{2G(M+m)}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\cdots(4)$$

$$M = m \qquad V = 2\sqrt{GM}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\cdots(4') \qquad M >> m \qquad V = \sqrt{2GM}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\cdots(4'')$$

となり、質量の違いで速度や時間が違ってくることがわかる。念のためにエネルギーで検証すると、

$$\frac{1}{2}\left(MV_M{}^2 + mV_m{}^2\right) = \frac{1}{2}\left(M\left(\frac{m\sqrt{2G}}{\sqrt{M+m}}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\right)^2 + m\left(\frac{M\sqrt{2G}}{\sqrt{M+m}}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\frac{Mm(M+m)2G}{M+m}\cdot\frac{r_0 - r}{r_0 r} = GMm\frac{r_0 - r}{r_0 r}$$

と(1)に一致する。

ここで、m=βM のように相対比として先を進めてみると、

$$V = \sqrt{2G}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\left(\frac{m}{\sqrt{M+m}} + \frac{M}{\sqrt{M+m}}\right) = \sqrt{2G(M+m)}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}} = \sqrt{2G}\sqrt{(1+\beta)M}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}}\cdots(5)$$

であり、βが大きければ速度は増すことがわかる。

では、双方が接触する時の速度はどうだろう。M と m の各々の半径を rM と rm とすると、接触した瞬間は、

$$V = \sqrt{2G}\sqrt{(1+\beta)M}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r_0 r}} = \sqrt{2G}\sqrt{(1+\beta)M}\sqrt{\frac{r_0 - (r_M + r_m)}{r_0 (r_M + r_m)}}$$

と言う速度になっている。

$$r=r_0\cos^2\theta \qquad \sqrt{\frac{r_0-r}{r_0 r}}=\sqrt{\frac{r_0-r_0\cos^2\theta}{r_0{}^2\cos^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{r_0}}\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{r_0}}\sqrt{\frac{sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{r_0}}tan\theta$$

$$V=\sqrt{2G}\sqrt{(1+\beta)M}\sqrt{\frac{r_0-r_0\cos^2\theta}{r_0{}^2\cos^2\theta}}=\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}tan\theta\cdots(6)$$

この時の各々の速度は、

$$V_M=\frac{m\sqrt{2G}}{\sqrt{M+m}}\sqrt{\frac{r_0-r}{r_0 r}}=\frac{\sqrt{2G}\beta M}{\sqrt{(1+\beta)M}}\sqrt{\frac{r_0-r}{r_0 r}}=\frac{\sqrt{2G}\beta M}{\sqrt{(1+\beta)M}}\frac{1}{\sqrt{r_0}}tan\theta=\frac{\sqrt{2G}\cdot\beta\cdot\sqrt{M}}{\sqrt{r_0}\sqrt{(1+\beta)}}tan\theta\cdots(6')$$

$$V_m=\frac{M\sqrt{2G}}{\sqrt{M+m}}\sqrt{\frac{r_0-r}{r_0 r}}=\frac{\sqrt{2G}M}{\sqrt{(1+\beta)M}}\sqrt{\frac{r_0-r}{r_0 r}}=\frac{\sqrt{2G}M}{\sqrt{(1+\beta)M}}\frac{1}{\sqrt{r_0}}tan\theta=\frac{\sqrt{2G}\sqrt{M}}{\sqrt{r_0}\sqrt{(1+\beta)}}tan\theta\cdots(6'')$$

である。

接触するまでの時間の計算だが、

$$\frac{dr}{dt}=V=\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}\sqrt{\frac{r_0}{r}-1} \qquad \frac{1}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}}\cdot dr=dt \qquad \frac{1}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}}\cdot dr=\int dt=t \qquad (7)$$

$$r=r_0\cdot\cos^2\theta \qquad \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r_0\cdot\cos^2\theta}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}}=\frac{\cos\theta}{sin\theta} \qquad \frac{dr}{d\theta}=-2r_0\cdot sin\theta\cos\theta \qquad dr=-2r_0\cdot sin\theta\cos\theta\cdot d\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}}\cdot dr=\frac{1}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\int\frac{\cos\theta}{sin\theta}(-2r_0\cdot sin\theta\cos\theta)\cdot d\theta=\frac{-2r_0}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\int\cos^2\theta\cdot d\theta=\frac{-r_0}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\int(\cos2\theta+1)\cdot d\theta$$

時間は

$$t=\frac{-r_0}{\sqrt{\frac{2G(1+\beta)M}{r_0}}}\int_\theta^0(\cos2\theta+1)\cdot d\theta=\frac{-r_0}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\left[\frac{sin2\theta}{2}+\theta\right]_\theta^0=\frac{r_0}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\left[\frac{sin2\theta}{2}+\theta\right]=\frac{r_0}{\sqrt{2G}\sqrt{\frac{(1+\beta)M}{r_0}}}\left[\frac{sin2\theta}{2}+\theta\right]$$

となる。

$$=\frac{1}{\sqrt{2G}}\sqrt{\frac{r_0{}^3}{(1+\beta)M}}\cdot\left[\frac{sin2\theta}{2}+\theta\right] \qquad (8)$$

ただし、積分範囲は、

$$r_0 \geq r = r_0 \cdot \cos^2\theta \geq \left(r_M + r_m\right) \qquad 1 \geq \cos^2\theta \geq \frac{\left(r_M + r_m\right)}{r_0} \qquad 1 \geq \cos\theta \geq \sqrt{\frac{r_M + r_m}{r_0}} \qquad 0 \leq \theta \leq \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{r_M + r_m}{r_0}}\right) \cdots (9)$$

のようになる。

この先は、Microsoft Excel でも使って計算する必要がある。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

地球と月の質量比は 1:0.012 程度である。地球と月の間には重力が均衡する点がある。これは計算すれば簡単に求まりそうである。
地球の質量は 5.974E+24kg、月は 7.35E+22kg、距離はおおよそ 380,000,000m であるから、地球からの均衡点を x とすれば、

$$\frac{GM}{x} = \frac{Gm}{380{,}000{,}000 - x} \qquad mx = M\left(380{,}000{,}000 - x\right) \qquad x = \frac{380{,}000{,}000M}{M + m}$$

$$x = \frac{380{,}000{,}000 \times 5.974 \times 10^{24}}{5.974 \times 10^{24} + 7.35 \times 10^{22}} = \frac{380{,}000{,}000 \times 5.974 \times 10^{2}}{5.974 \times 10^{2} + 7.35} = 3.75 \times 10^{8}(m) = 3.75 \times 10^{5}(km) \qquad \frac{375{,}000}{380{,}000} = 0.988$$

となり、重力均衡点は地球と月を結ぶ直線上の月に極めて近い部分に均衡点があることがわかる。
我々の銀河系より少々規模が大きいアンドロメダはお互いに接近し、いずれは交差するという。同規模の質量とすれば、双方が同じような加速度を受けながら接近することになる。銀河を一体として考えれば、いろいろなことがわかるだろう。

	距離	質量	半径
太陽	0km	1.9891×10^{30}kg	696,000km
木星	778,412.010km	1.8986×10^{27}kg (1/1000)	69,911±6km
地球	149,597,870km	5.9736×10^{24}kg	6,357km