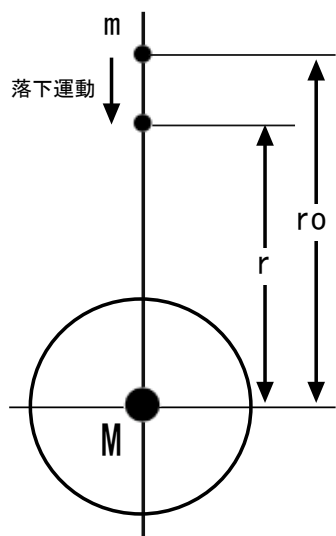


地球トンネル（地球の裏側まで垂直に穴をほって、物を落下させたら？）

これもポテンシャルエネルギー問題である。



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \quad \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = E = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{r_0}$$

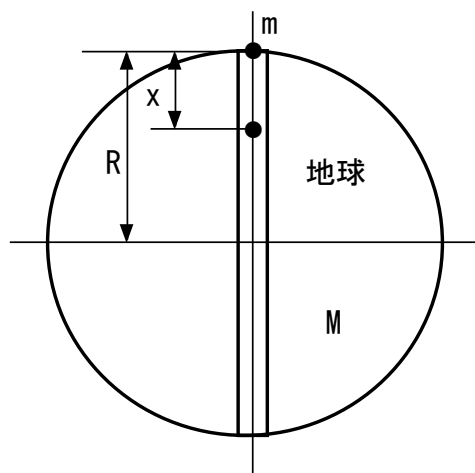
$$v_0 = 0 \quad v^2 = -2GM\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = 2GM\left(\frac{r_0 - r}{r_0 \cdot r}\right) = \frac{2GM}{r_0}\left(\frac{r_0 - r}{r}\right) \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} = \frac{dr}{dt} \quad (a1)$$

のように示した。

しかし、これは M 一点に質量が集中しているとしてのものである。

もし、地球の裏側まで垂直に穴を掘って（勿論中心を通る）、そこから物体を落下させる場合には、極座標で示した重力計算のように「落下物から見て下部の中心方向の質量しか影響がなくなる」から、落下に従い重力も減り加速度も減り中心部では加速度零となり、今度はマイナスになって行く」と言うことになる。そこで内部を貫通するような場合には、その区間は別の計算となってしまう。

地球の表面から初速度は 0 で穴に落下させる場合だが。こんなことを計算しなければならない。上式で M が x の変数になる。



即ち、x における下部側の質量は $M_x = \left(\frac{R-x}{R}\right)^3 M$ であり、この場所におけるポテンシャルを考えると

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{G\left(\left(\frac{R-x}{R}\right)^3\right)Mm}{R-x} = E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{GMm}{R} \quad \frac{1}{2}v^2 + \frac{G\left(\left(\frac{R-x}{R}\right)^3\right)M}{R-x} = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{GM}{R}$$

$$v_0 = 0$$

$$v^2 = 2GM\left\{\frac{1}{R} - \frac{\left(\frac{R-x}{R}\right)^3}{R-x}\right\} = 2GM\left\{\frac{1}{R} - \frac{(R-x)^2}{R^3}\right\} = \frac{2GM}{R^3}\{R^2 - (R-x)^2\} \dots (1)$$

と、まずここまでとしておこう。ただ、ここではポテンシャルの記号は変えてある。変えている理由は、地中への落下に従い、重力が減りポテンシャルの差は逆の符合になるからである。

$$R - x = R \cos \theta \cdots (2) \quad -\frac{dx}{d\theta} = -R \sin \theta \quad dx = R \sin \theta \cdot d\theta \quad x = R(1 - \cos \theta)$$

$$0 \leq x \leq 2R \quad 0 \geq -x \geq -2R \quad R \geq (R - x) = R \cos \theta \geq -R \quad 1 \geq \cos \theta \geq -1 \quad 0 \geq \theta \geq \pi \cdots (3)$$

$$v^2 = \frac{2GM}{R^3} \{R^2 - (R - x)^2\} = \frac{2GM}{R^3} \{R^2 - R^2 \cos^2 \theta\} = \frac{2GM}{R} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{2GM}{R} \sin^2 \theta \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{R \sin \theta \cdot d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \sin \theta \cdots (4)$$

$$\frac{R \cdot d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad dt = \frac{R}{\sqrt{\frac{2GM}{R}}} d\theta = \frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{2GM}} d\theta = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}} d\theta \quad \int_0^t dt = t = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}} \int_0^\pi d\theta = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}} [\theta]_0^\pi = \frac{R^{\frac{3}{2}} \pi}{\sqrt{2GM}} \cdots (5)$$

空気抵抗などはないものとするが、

- ・置換積分のために(2)のようにする。
- ・(2)から積分範囲は(3)となる。
- ・v は計算を進めると(4)のようになる。θが零（落下開始の瞬間）やπ（裏側まで到達したとき）の速度は零であることがわかる。最大速度もπ/2（地球の中心）であることがわかる。
- ・裏側までの時間は(5)であることがわかる。下記値を入れて計算してみると

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ (m}^3/\text{s}^2/\text{kg)} \quad M = 5.97 \text{ (kg)} \quad R = 6357 \times 10^3 \text{ (m)}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.673 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{6357 \times 10^3}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.673 \times 5.97 \times 10^8}{63.57}} = \sqrt{1.253} \times 10^4 = 1.12 \times 10^4 \text{ (m/s)} = 11.2 \text{ (km/s)}$$

$$t = \frac{R^{\frac{3}{2}} \pi}{\sqrt{2GM}} = \frac{(6357 \times 10^3)^{\frac{3}{2}} \times 3.14}{\sqrt{2 \times 6.673 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}} = \frac{(6.357 \times 10^6)^{\frac{3}{2}} \times 3.14}{\sqrt{2 \times 6.673 \times 5.97 \times 10^{13}}} = \frac{\sqrt{256.9} \times 10^2 \times 3.14}{\sqrt{7.968}} = 1784 \text{ (s)} = 29.73 \text{ (minutes)}$$

もし、中心だけで計算してしまうと、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R-x} = E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \quad \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R-x} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R} \quad v_0 = 0 \quad v^2 = 2GM \left\{ \frac{1}{R-x} - \frac{1}{R} \right\} = 2GM \left\{ \frac{x}{R(R-x)} \right\} \cdots (1')$$

となり v(max) は x=R では計算出来なくなる。

ただ、極限までは計算できる、

$$v = \sqrt{2GM} \sqrt{\frac{1}{R-x} - \frac{1}{R}} = \sqrt{2GM} \sqrt{\frac{x}{R(R-x)}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \sqrt{\frac{x}{R-x}} \quad \text{となり } x \rightarrow R \text{ という中心部で、上記計算例と比較して、更に } \sqrt{\frac{x}{R-x}} \text{ が掛かる}$$

意味ない巨大速度になってしまうこともわかる。実際問題として、Mの表面で衝突してしまうから、こんな計算も無意味である。

思い出したが、重力列車などといって、地下に斜めにトンネルを掘って、重力で落下させ別の地点に到達させるような遊び研究をしている学者が居ることを聞いたことがある。こんなのも全く意味無い研究だろう。地下に向かってトンネルなど掘って、巨大な投資、維持管理出来るはずもないし、マグマが出てくるかも知れないからである。