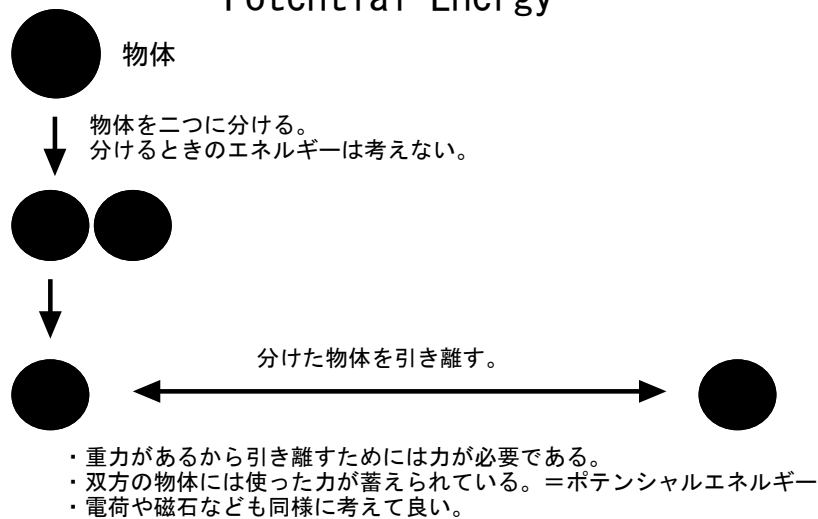


Potential Energy

高校時代だろうが水力発電で「位置のエネルギー＝高さ×重力×質量」と教えられ「(直感的に) 当然だ」で終わりである。ところが、これを理解するのは結構大変である。高さ×重力×質量なら直感的で簡単だが、単純にそうではないからである。今頃になってそれがわかった。しかし、それを正確に理解しようとする結構観念的に難しい。こんなことが直ぐに出てくるからである。

- (1) 何故「位置のエネルギーは $1/r$ 比例なのか？ エネルギーならプラスだろう。何故、マイナスがつくのか？」と言うことである。こんなことを厳密に意識して学ばないとわからなくなるようである。
- (2) 一般的には、重力場のものではあるのだが、これは電荷でのクーロン力、磁場でも同じもので、共通するものでもある。
- (3) こんな事はイメージして先に進んだ方がよいだろう。 $1/r$ を信じるとすれば、遠ざかれば遠ざかるほど位置のエネルギーは大きくなるのだが、無限の遠点間のエネルギーは $1/r$ であるから零である。近づくに従い、エネルギーは減るのだが、無限の遠点間と言う元々が零であるから、マイナスが増えて行くことになる。
- (4) 重力の場においては、引き離す時のエネルギーをプラス（増える）と考えれば、引き寄せられる時のエネルギーはマイナス（減る）と考えればよいだろう。
- (5) ただ、引き離したときに相対的に速度を持っていれば、運動のエネルギーも持っていることになってしまう。であるから、無限に静かに引き離した、あるいは引き離して停止させたということが条件になる。相対性理論などは考えていないことも条件になる。
- (6) $1/r$ であると言うことは $r=0$ の時には無限大になる。これはまた極限としての別の理論を適用しなければならないものかも知れない。
- (7) $1/x$ を積分すれば $\log(x)$ である。 $y = \log(x)$ は $x = e^y$ であり、

Potential Energy



以上を前置きとして、以下の式で考えてみよう。

- ・ まず重力で、力であり $\left\{ f(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \right\}$ (1) である。これは、実際からこうなるものと理解せざるを得ないだろう。これは加速度要素を持っているのもよいであろう。距離に依存しているから等加速度でないのもわかるであろう。
- ・ 一般的なエネルギー伝達と言うものは、物体が直接接触れ合うことに依って行われるのだが、重力の場合には物体が直接接触れ合うことはない。自動車の内燃機関なども、触れ合わないように思われるが、燃焼したガスの圧力によって間接的に触れ合っている。
- ・ ポテンシャルエネルギーは、全く触れ合っていないのにエネルギーを持っていると言うものである。単独では持たないが、複数の物体が離れて存在していると相互で持っている **相対的なエネルギー** である。
- ・ **こんな考え方はどうだろう。最初に物体が、単独で存在している時には potential のエネルギーは持たない。ところが、これを二つに分離して引き離そうとすると、重力が存在しているから、力が必要である。であるから、引き離せば双方には引き離された距離と質量に依存した何かの力（エネルギー）が蓄えられたことになる。双方の物体を引き離した後放置すれば、抵抗がなければ重力により徐々に接近して行く。位置のエネルギーが運動のエネルギーに変化して行く。**
- ・ これがポテンシャルエネルギーである。(1)の力を積分すると出てくるポテンシャルエネルギー(2)となるのは理解できるだろう。

$$\left\{ f(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \right\} \quad (1) \quad \rightarrow \quad U(r) = -\int \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = -G \frac{Mm}{r} + C \quad (2)$$

- ・ p~q までの積分を実施してみよう。0 は式上から困るので、0 でない条件のもとにである。
- ・ $q \geq p$
$$U(r) = -\int_p^q \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = GMm \left[\frac{1}{r} \right]_p^q = GMm \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$$
- ・ $q > p$ であるから、U(r) はマイナスの値となる。p を固定して考えると、元々 $-GMm/p$ のエネルギーがあり、 $p=q$ ならば零、そこから引き離そうとするとマイナスエネルギーが GMm/q 減ると言うことである。ただ、q が無限に大きくなると $-GMm/p$ に収斂する、と言うことがわかる。
- ・ Potential と言うのは「潜在的」という意味がある。あるようには見えない潜在的なエネルギーである。重力があるから離れた物体にはこれだけのエネルギーを秘めていると理解したら良いのではないかと思う。
- ・ さらに(2)の微小範囲を考えてみる。これは(4)のように「位置のエネルギー＝高さ×重力×質量」となる。微小範囲で極限を考えると、それは微分となるので力に戻ってしまう。だが、これは微分ではなく「あくまでも微小範囲であり、力と距離の単なる積」であるから、それは加速度ではなく、位置のエネルギーである。

$$E_{h0} = -\frac{GMm}{h_0} \quad (1) \quad E_{h1} = -\frac{GMm}{h_1} \quad (2)$$

- ・
$$E_{h0} - E_{h1} = -GMm \left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_1} \right) = -GMm \left(\frac{h_1 - h_0}{h_0 h_1} \right) = -\frac{GMm}{h_0 h_1} (h_1 - h_0) \quad (3)$$
- ・ 近接した距離では $h_1 \approx h_0$ はのようにほとんど同値なのだが、 $h_1 - h_0 = h$ のように極限ではなく零ではない。そこで、地球の表面の小さな高さの変化の場合には微小区間としての計算をすると(4)になる。

$$E_{h0} - E_{h1} = -GMm \left(\frac{h_1 - h_0}{h_0 h_1} \right) = -\left(\frac{GM}{h_0^2} \right) m (h_1 - h_0) = -gmh \quad (4) \quad \text{即ち「位置のエネルギー＝重力×質量×高さ」である。}$$

このように「物体が単独で存在していた時は零、分割して分離するときのエネルギーを正とすれば、分離された後放出したがっているエネルギーには負が付く」と考えればよいのではないだろうか。

以上は正確な記述ではないかも知れない。しかし、こんなことを疑問に持ったり、正確に知る人・教える人は一体どれだけ居るのだろう。「 $1/r$ は当たり前、覚えておけばよい」で済ましていることも多いのではないだろうか。こんな記述が出来たのは、インターネットで参考になるものを発見したからである。しかし「引き離す」という文言はなかった。