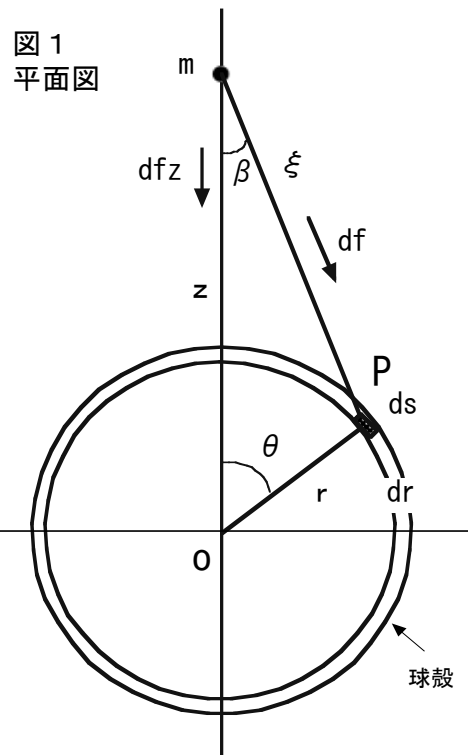


万有引力・引力計算・・・引力は何故質量が1点集中として、その点間の距離で考えて良いのか（極座標で）

結論から先に言えば、

- ・ 直行座標ではマイクロソフト・エクセルでの計算の結果「どの辺の水平面の重力影響が強いかわかる」の特長があった。これは水平面で輪切りにして積分しているからである。
- ・ 一方、極座標の場合は、輪切りではなく**球殻**（中空のボールのようなもの）を追求している。
- ・ これは、重力中心は殻の中心にあるが、外側に存在するものには重力を与えるが、**中側は無重力**という結果になって面白い。
- ・ 重力中心は殻の中心にあるがわかれば、全体でも中心は中心である。また、中側は無重力と言うことは、地中に入ったときは上部の重力は零であり、中心に向かう方向の質量だけが影響を与えるという結果を示している。
- ・ 直交座標に慣れていない人にはちょっと戸惑う面もあるが1回はじっくりやってみた方がよいだろう。



宇宙には、銀河などがほとんどない空洞部分があるらしい。銀河球殻でも同様なのではないだろうか。

上記の球殻の結論からマクロ的に推察すると、外から銀河などが移動してきて、この空洞部分に入るまでは他の銀河などの重力影響を受けているが、入ると急に無重力状態になり、入ったときの慣性のままで空洞部分の末端まで動いて行くのかも知れない。一つの星であるならば、殻と言うことは考えられない。しかし、銀河ならば殻同様なものは考えられる。

極座標の場合に、まず理解するものは図1である。

- ・ 球殻があり、この球殻上の点Pに、微小面積 ds を設けている。
- ・ 球殻上のこの点Pが、点mに与える重力を計算しようとするものであり、球殻は質量Mである。
- ・ df は ds に働く重力であるが、原点o方向だけを考えればよいので dfz である。 dfz に垂直な重力は左右で相殺されてしまうので考えなくて良い。
- ・ 他、角度 $\beta \cdot \theta$ 、半径 r 、球殻の厚み dr 、距離 $\xi \cdot z$ などは図示の通りである。

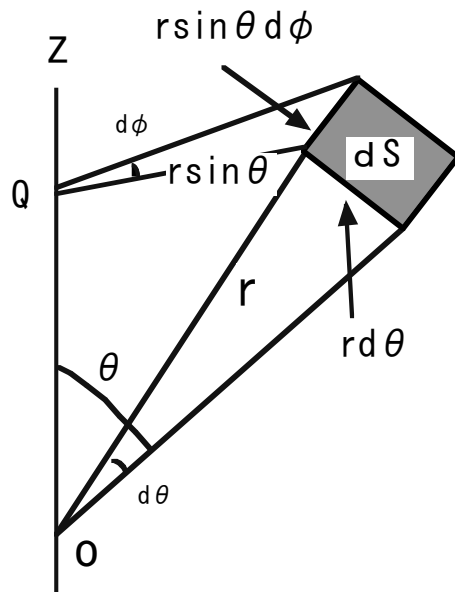
まず理解したいことは、下記(1)の式であるのだが、立体的に理解するために、図 2a を見ていただきたい。より立体的に理解できるだろう。 ϕ というx軸との角度が入ってきている点に注意を要する。

$$df_z = \alpha G \cdot \frac{ds}{\xi^2} \cdot \cos \beta = \alpha G \cdot \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\xi^2} \cos \beta \quad (1)$$

ただし、 α は球殻の密度であり $\alpha=M/4\pi r^2$ である。今考えているのは球殻であるが、この球殻が質量 M を持ち球殻の表面積を考えれば、こうなるのはわかるであろう。ただし、以降の目的は重力の中心位置がどこにあるのかを調べることであるから、この α は問題ではなく省略してもよいものである。

では何故式(1)が成り立つかだが、今度は下記の図3である。

図3 点Pの拡大図



- ・ ds の一辺は $r \cdot d\theta$ である。微小区間であるからこれでよい。
- ・ 残りの一辺は $r \cdot \sin \theta \cdot d\phi$ である。
- ・ 面積は上記の積となる。即ち $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ である。
- ・ 球の表面に四辺形の微小面積？、これも微小なるがゆえに収束するので問題はない。
- ・ 分母に点 P-m 間の距離の二乗の ξ の二乗が来る。
- ・ これに垂直方向成分である $\cos \beta$ が加わる。
- ・ αG は前述の常数である。
- ・ こんなことで df_z が定義される。
- ・ 図 2a で ϕ が入った来たが、これは β や θ に対しても共通であり、図 1 の平面図が立体でも有効であることはわかるであろう。

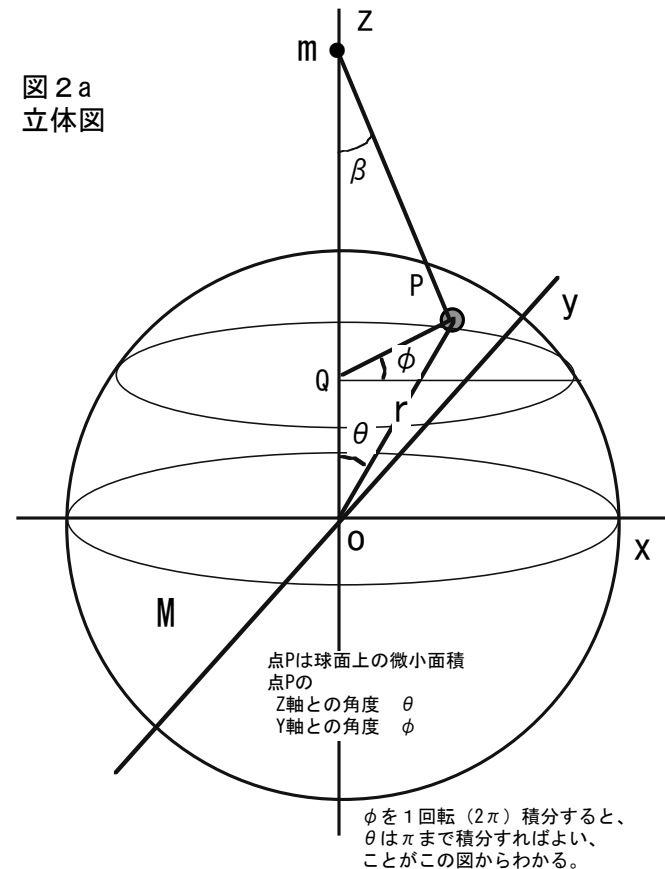
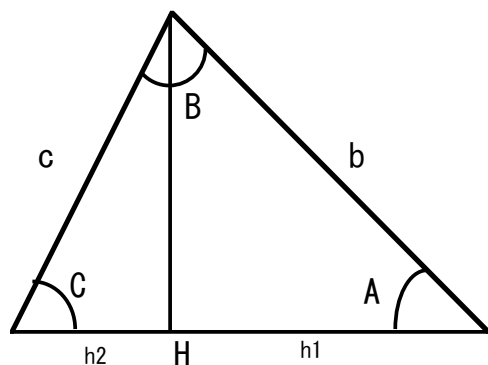


図 2a
立体図

次に予備知識として下図と式を意識しておかなければならない。(1)の式を積分しやすいようにいじるのが目的である。



$$b \sin A = c \sin C \quad h1 = a - c \cos C$$

$$b^2 = (b \sin A)^2 + h1^2 = (c \sin C)^2 + (a - c \cos C)^2 =$$

$$a^2 - 2ac \cos C + c^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) = a^2 + c^2 - 2ac \cos C = b^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos C \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$$

ここでやっと(1)の式をいじり始める。即ち、積分を開始する。

$$\begin{aligned} f_z &= \alpha G \int df_z = \alpha G \int \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\xi^2} \cos \beta = \alpha G \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \left[\frac{r^2 \sin \theta}{\xi^2} \cdot \frac{\xi^2 + z^2 - r^2}{2\xi z} \right] \quad \left(\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \quad \xi^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos \beta \right) \\ &= \alpha G \cdot 2\pi \cdot r^2 \int_0^\pi d\theta \left[\frac{\sin \theta}{\xi^2} \cdot \frac{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta) + z^2 - r^2}{2\xi z} \right] = \alpha G \cdot 2\pi \cdot r^2 \int_0^\pi d\theta \left[\frac{\sin \theta}{\xi^2} \cdot \frac{2z^2 - 2rz \cos \theta}{2\xi z} \right] = \alpha G \cdot 2\pi \cdot r^2 \int_0^\pi d\theta \left[\frac{\sin \theta \cdot (z - r \cos \theta)}{\xi^3} \right] \\ &= \alpha G \cdot 2\pi \cdot r^2 \int_0^\pi d\theta \left[\frac{\sin \theta \cdot (z - r \cos \theta)}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

ここまで来たが今度は部分積分を思い出す。

$$\frac{d}{d\theta} (f(\theta)g(\theta)) = f'(\theta)g(\theta) + f(\theta)g'(\theta) \quad f'(\theta)g(\theta) = \frac{d}{d\theta} (f(\theta)g(\theta)) - f(\theta)g'(\theta) \quad \int f'(\theta)g(\theta)d\theta = [f(\theta)g(\theta)] - \int f(\theta)g'(\theta)d\theta$$

である。これを思い出して下記を意識する。

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2rz \sin \theta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{rz \sin \theta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2rz \sin \theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} = \frac{rz \sin \theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \quad (4)$$

下記のように $f(\theta)$ 、 $g(\theta)$ を考え、部分積分をやってみる。

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \quad g(\theta) = z - r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (f(\theta)g(\theta)) &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \cdot (z - r \cos \theta) \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \right) \cdot (z - r \cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \frac{d}{d\theta} (z - r \cos \theta) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2rz \sin \theta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \cdot (z - r \cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \cdot r \sin \theta \\ \therefore \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \cdot (z - r \cos \theta) \right) &= -\frac{rz \sin \theta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \cdot (z - r \cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \cdot r \sin \theta \quad (5) \end{aligned}$$

(5) の右辺第 1 項を求めるのが目的であるので、移行して (6) のように変形できる。(6) を積分すれば (7) のようになる。

$$\frac{rz \sin \theta}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \cdot (z - r \cos \theta) = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \cdot (z - r \cos \theta) \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{rz \sin \theta (z - r \cos \theta)}{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \cdot d\theta &= \int \frac{r \sin \theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} d\theta - \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \cdot (z - r \cos \theta) \right] \\ &= \frac{1}{z} \left[\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta} \right]_0^\pi - \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}} \cdot (z - r \cos \theta) \right]_0^\pi \quad (7) \end{aligned}$$

(7) を計算してみれば (8) となる。

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin\theta(z-r\cos\theta)}{(r^2+z^2-2rz\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \cdot d\theta &= \frac{1}{rz^2} \left[\sqrt{r^2+z^2-2rz\cos\theta} \right]_0^\pi - \frac{1}{rz} \left[\frac{(z-r\cos\theta)}{\sqrt{r^2+z^2-2rz\cos\theta}} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{rz^2} [(z+r)-|z-r|] - \frac{1}{rz} \left[\frac{z+r}{|z+r|} - \frac{z-r}{|z-r|} \right] = \frac{1}{rz^2} [(z+r)-|z-r|] + \frac{1}{rz} \left[\frac{z-r}{|z-r|} - 1 \right] \quad (8) \end{aligned}$$

絶対値が入ってきたが、 $\sqrt{\quad}$ 内では絶対値を使用し虚数にならないようにしている。 $\sqrt{\quad}$ がないところでは絶対値は使用していない。この理由は、 $r-z$ が負になる（球殻の内部に点 m がある場合）があるからである。

ここで今まで省略してきた係数 α を入れる。

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 2\pi \cdot r^2 \int_0^\pi d\theta \left[\frac{\sin\theta(z-r\cos\theta)}{(r^2+z^2-2rz\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \frac{M}{4\pi \cdot r^2} \cdot 2\pi \cdot r^2 \left[\frac{1}{rz^2} [|r+z|-|r-z|] - \frac{1}{rz} \left[\frac{z+r}{|z+r|} - \frac{z-r}{|z-r|} \right] \right] \\ &= \frac{M}{2} \left[\frac{1}{rz^2} [|r+z|-|r-z|] - \frac{1}{rz} \left[\frac{z+r}{|z+r|} - \frac{z-r}{|z-r|} \right] \right] = \frac{M}{2} \left[\frac{1}{z^2} [|r+z|-|r-z|] - \frac{1}{z} \left[\frac{z+r}{|z+r|} - \frac{z-r}{|z-r|} \right] \right] \quad (8) \end{aligned}$$

π などは消えてしまう。ここで点 P が球殻の外部か内部かを下記のように考えてみる。

$$z-r \geq 0 \quad \frac{M}{2} \left[\frac{1}{rz^2} \{(z+r)-|z-r|\} + \frac{1}{rz} \left\{ \frac{z-r}{|z-r|} - 1 \right\} \right] = \frac{M}{2} \left[\frac{1}{rz^2} \{(z+r)-(z-r)\} + \frac{1}{rz} \left\{ \frac{z-r}{z-r} - 1 \right\} \right] = \frac{M}{2} \cdot \frac{2r}{rz^2} = \frac{M}{z^2} \quad (9)$$

$$z-r < 0 \quad \frac{M}{2} \left[\frac{1}{rz^2} \{(z+r)-|z-r|\} + \frac{1}{rz} \left\{ \left(\frac{z-r}{|z-r|} - 1 \right) \right\} \right] = \frac{M}{2} \left[\frac{1}{rz^2} \{(z+r)-(r-z)\} + \frac{1}{rz} \left\{ \left(\frac{z-r}{-(z-r)} - 1 \right) \right\} \right] = \frac{M}{2} \left(\frac{2z}{rz^2} - \frac{2}{rz} \right) = 0 \quad (10)$$

となり、「点 m が外部の場合は、重力中心＝球殻の中心」と考えて良い、「内部の場合は、重力はない」と言うことになる。

球殻がこの結果であることは、その球殻を積層して球にしても「点 m が外部の場合は、重力中心＝球の中心」であることがわかり、「内部の場合は、重力はない」ということであるから「点 m の内部側だけの重力を受ける」と言うことになる。

直交座標での計算ではこのようなことはわかり難い（絶対値を入れれば）、極座標の場合にはこんなことはわかりやすい。