# 万有引力・引力計算・・・引力は何故質量が１点集中として、その点間の距離で考えて良いのか（直行座標で）

図１は、球の中に、微小なΔx の幅とΔz の厚みを持つ円のリングを考えている。重力はmとこのリングの間に働いている。ただ、横方向は左右・前後に相殺されてしまうので、問題となるのは垂直方向のベクトルだけである。
こんなリングを考えたのは、このリングの垂直方向引力がわかれば、後１回の積分で計算も簡単になり、答えは出てしまうと言う工夫からである。

図１

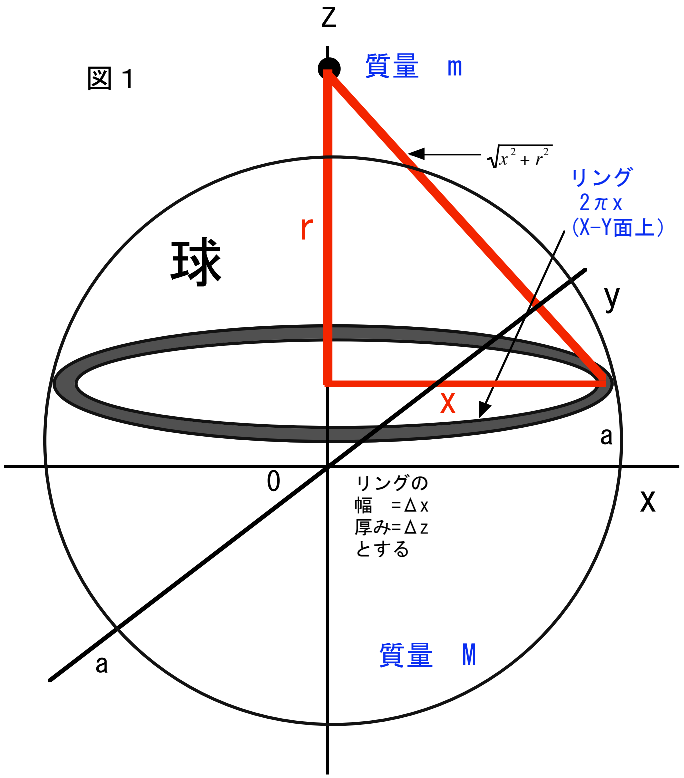



図１の説明を加えよう。

・リングの体積は $2\pi x\Delta x\Delta z$ である。
半径 a の球の体積は $\frac{4}{3}\pi a^3$ である。密度は $\frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}=\frac{3M}{4\pi a^3}$ となる。
この結果リングの質量は $2\pi x\Delta x\Delta z\frac{3M}{4\pi a^3}=\frac{3M}{2a^3}\cdot x\Delta x\Delta z$ となる。

・引力は、これに G(引力常数)と質量 m を掛けたものが係数となり、結果は $\frac{3GMm}{2a^3}\cdot x\Delta x\Delta z$ となる。

・ $\frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}$ は垂直方向のベクトルを表すもの、$\frac{1}{x^2+r^2}$ は距離の二乗に反比例という引力（常数は前に G で含んでいる）である。

・ 面倒なのでさし当たり $\frac{3GMm}{2a^3}=\alpha$ としておく。

結果が $\frac{GMm}{r^2}$ であることを知っていると、分母にπや a^3 などが出てくるのを不思議に思うが､計算をして行くと最終的には消えてしまうので予め意識しておいた方がよいだろう。

下記の式を説明する。
まず、リングが m に与える重力を考えなければならない。距離と垂直方向のベクトルを考えれば(1)が成り立ち、これを 0〜x まで積分したものが(2)になる。

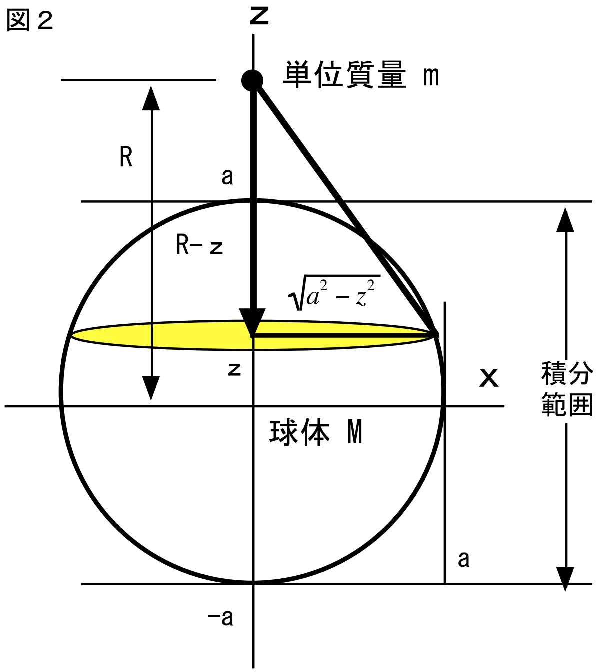
$$\alpha \cdot 2\pi \cdot x \cdot \Delta x \Delta z \cdot \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}} \cdot \frac{1}{\left(x^2+r^2\right)} = \alpha \cdot \frac{r \cdot x}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Delta x \Delta z \qquad (1)$$

$$\alpha \cdot r\Delta z \int_{x=0}^{x} \frac{x}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = \alpha \cdot r\Delta z \int_{x=0}^{x} \frac{x}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = \alpha \cdot r\Delta z \int_{x=0}^{x} x\left(x^2+r^2\right)^{\left(-\frac{3}{2}\right)} \cdot dx$$

$$= \alpha \cdot r\Delta z \int_{x=0}^{x} x\left(x^2+r^2\right)^{\left(-\frac{3}{2}\right)} \cdot dx = \alpha \cdot \Delta z \left[\frac{-r}{\sqrt{x^2+r^2}}\right]_{x=0}^{x} = \alpha \cdot \Delta z \left(-\frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{r}{r}\right) = \alpha \cdot \Delta z \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(x/r)^2+1}}\right) \qquad (2)$$

今度は図２を見ていただこう。
ここでは、まず R>=a（m は球体の中には入り込まない）を条件としておこう。
次は次式である。前式（再掲載）の結果を $x \to \sqrt{a^2-z^2}$ 　$r \to R-z$ に置換するものである。これは単純置換であるのだが、単なる置き換えで問題ないのはわかるであろう。

図２




$$x = \sqrt{a^2-z^2} \qquad R \to R-z \qquad -a \le z \le a$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{(x/R)^2+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\left(a^2-z^2\right)/(R-z)^2+1}}$$

$$= 1 - \frac{(R-z)}{\sqrt{\left(a^2-z^2\right)+(R-z)^2}} = 1 - \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2-2Rz}} + \frac{z}{\sqrt{a^2+R^2-2Rz}} \qquad (3)$$

しかし、これでも積分しにくいので、更に次のように置換することになる。
ただ注意すべき点は積分範囲である。R+a(R-(-a))→R-a の範囲で積分しなければならない。

$$\sqrt{a^2+R^2-2Rz}=t \qquad a^2+R^2-2Rz=t^2 \qquad z=\frac{\left(a^2+R^2\right)}{2R}-\frac{t^2}{2R} \qquad \frac{dz}{dt}=-\frac{t}{R} \qquad dz=\left(-\frac{t}{R}\right)dt$$

$$-a\le z\le a \qquad \sqrt{a^2+R^2-2aR}=\left(R-a\right)\le t\le\sqrt{a^2+R^2+2aR}=\left(R+a\right) \qquad R\ge a$$

$$1-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2-2Rz}}+\frac{z}{\sqrt{a^2+R^2-2Rz}}=1-\frac{R}{t}+\frac{\frac{\left(a^2+R^2\right)}{2R}-\frac{t^2}{2R}}{t}=1-\frac{1}{2R}\frac{\left(R^2-a^2\right)}{t}-\frac{1}{2R}t \qquad (4)$$

$$\alpha\int_{z=-a}^{a}\left(1-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2-2Rz}}+\frac{z}{\sqrt{a^2+R^2-2Rz}}\right)\cdot dz=\alpha\int_{t=R+a}^{R-a}\left(1-\frac{1}{2R}\frac{\left(R^2-a^2\right)}{t}-\frac{1}{2R}t\right)\left(-\frac{t}{R}\right)dt=\alpha\int_{t=R+a}^{R-a}\left(-\frac{t}{R}+\frac{1}{2R^2}\left(R^2-a^2\right)+\frac{t^2}{2R^2}\right)dt$$

$$=\frac{\alpha}{2R^2}\int_{t=R+a}^{R-a}\left\{t^2-2Rt+\left(R^2-a^2\right)\right\}dt \qquad (5)$$

最後は結果求めであり、下記のようになる。

$$\frac{\alpha}{2R^2}\int_{t=R+a}^{R-a}\left(t^2-2Rt+\left(R^2-a^2\right)\right)\cdot dt=\frac{\alpha}{2R^2}\left[\frac{1}{3}t^3-Rt^2+\left(R^2-a^2\right)t\right]_{R+a}^{R-a}$$

$$=\frac{\alpha}{2R^2}\left[\frac{1}{3}\left\{\left(R-a\right)^3-\left(R+a\right)^3\right\}-R\left\{\left(R-a\right)^2-\left(R+a\right)^2\right\}+\left(R^2-a^2\right)\left\{\left(R-a\right)-\left(R+a\right)\right\}\right]=\frac{\alpha}{2R^2}\left[-\frac{1}{3}\left(6R^2a+2a^3\right)+4R^2a-2R^2a+2a^3\right]$$

$$=\frac{\alpha}{2R^2}\left[\frac{4}{3}a^3\right]=\frac{\frac{3GMm}{2a^3}\left[\frac{4}{3}a^3\right]}{2R^2}=\frac{2GMm}{2R^2}=\frac{GMm}{R^2} \qquad (6)$$

これで、中心でよいことがわかる。

　ここまでは、質量が均質の球として計算してきた。この球の外側に、殻を取り付けたらどうだろうか。殻と球全体の重力点の中心は同様に球の中心である。と言うことは「中空の殻の重力点の中心も同様に中心」であることがわかる。もし、そうでなければ、殻を取り付けると中心がずれることになってしまうからである。殻だけだったら中はどうなるか？は極座標の方での計算を参照いただきたい。