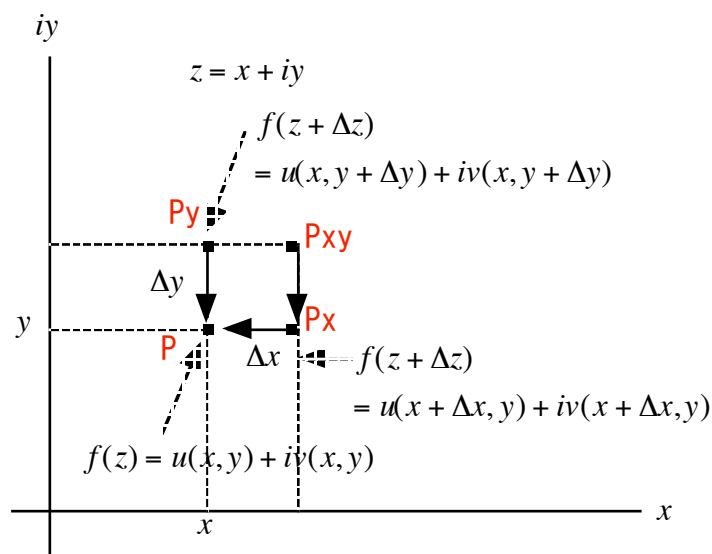


Cauchy-Riemann の定理

- ・ 複素関数も数の理としては同じ概念ということで、微分もできる。基本は同じであるのだが、実数とは少々違う面も持っている。
- ・ 実関数の $y=f(x)$ で x - y 平面のような場合には、ある点に左右から近づいたとき両方の値が存在し一致すれば、微分可能となった。
- ・ しかし、複素関数 $f(z)=F(x+iy)$ では、近づき方が x, y の複合であり、各々独立した x, y のすべて即ち周囲の全面から近づく事があり得ることを示している。
- ・ 従って「ある点で微分が可能か？」と言うことは「複素平面上の、どんな方向からその点に近づいても微分結果は同じ」という事でなければならないからである。これを満たす場合に、これを「正則 (regular)」と言う。
- ・ これを証明するためには、異なる二つの方向から近づいて、結果を比較すればよい。斜め方向から近づくのはわかりにくいから、実軸と虚軸の二つの方向から近づいてみて、結果を比較すれば、必要条件になっていることは明かである。
- ・ とは言うものの、何故にこのようなことを考えなければならないかは、今のところ「???'」である。
- ・ 虚数の微分は本来は、一般的には斜め方向なのだが、いきなりこれはわからない。

・ そこで、どちらが先でもよいのだが、まずは Δx 方向に、次に Δy 方向に微分し、それを合成して、 Δz 方向の微分とするのである。



$$z = x + iy \quad (1) \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2)$$

のような式を考える。この式はこの平面上 (x, iy) 上に $f(z)$ という関数が定義されているということである。かつ、式が実部と虚部に明確に別れるように定義したものである。

この式を $f'(z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ のような極言計算をして、微分の結果となる

ものを出したい。式はこんな風になる。

まず、点 Px または Py から P に近づく場合だが、

$$P_x \rightarrow P$$

$$f'(z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)\} + i\{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)\}}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3a)$$

$$P_y \rightarrow P$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)\} + i\{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)\}}{i\Delta y} \\ &= \frac{\{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)\} - i\{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)\}}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3b) \end{aligned}$$

縦横どちらから P 点に近づいても同じと言うことは、(3a) = (3b) と言うことであるから、
(3a) = (3b)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdots (4a) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdots (4b) \quad \text{が条件になる。}$$

微小区間では P_{xy} → P_x への移動は、P_y → P と同じであるから、斜め方向の点 P_{xy} からの P 点の移動の場合には (3a) + (3b) を考えればよい。更に (4a) と (4b) の条件を加味すれば、
(3a) + (3b)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} = 2 \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \cdots (5)$$

と全く同じものになり、斜め方向のこの場合も成り立つことがわかる。即ち必要十分条件と言える。これが成り立つものは微分可能と言えるのである。ただ、複素平面上で全面的に微分可能である必要はなく、限られた範囲でもよいのである。

微分可能と言うことは、実数同様に微積分が効く、と言うことで先々便利な応用が待っていることを示している（のだろうと信じて先に進むことになる）。

これは、極座標で示すこともできる。

$$f'(z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta r \cdot e^{i\theta}) - f(z)}{\Delta r \cdot e^{i\theta}} \quad \text{ただし、} \Delta z = \Delta r \cdot e^{i\theta} = \Delta r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \Delta x = \Delta r \cos \theta \quad \Delta y = \Delta r \sin \theta \quad \text{である。}$$

微小区間においては第 1 次の近似として、

$f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y) = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} + i\Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + i\Delta y \frac{\partial v}{\partial y}$ が成り立つ (x, y の各々を固定して考えればよい)、

$$\Delta u(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Delta u(x, y) = \{\Delta u(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Delta u(x, y + \Delta y)\} - \{\Delta u(x, y + \Delta y) - \Delta u(x, y)\} = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}$$

であり Δv についても同様だからである。

$$f'(z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} + i\Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + i\Delta y \frac{\partial v}{\partial y}}{\Delta r \cdot e^{i\theta}} = \frac{\Delta r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + i\Delta r \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} + i\Delta r \sin \theta \frac{\partial v}{\partial y}}{\Delta r \cdot e^{i\theta}}$$

$$= \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + i \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} + i \sin \theta \frac{\partial v}{\partial y} \right) e^{-i\theta} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \theta e^{-i\theta} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin \theta e^{-i\theta} \dots (6)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (e^{i\theta} - i \sin \theta) e^{-i\theta} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin \theta e^{-i\theta} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) - i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \sin \theta e^{-i\theta}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \sin \theta e^{-i\theta} \dots (6a)$$

$\sin \theta e^{-i\theta}$ の項が 0 であるならば、前の座標同様にコーシー・リーマンが成り立つことがわかるのだが、こちらの場合はちょっと面倒である。

同じになるはずだが、ついでに $\cos \theta$ でやってみる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \theta e^{-i\theta} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin \theta e^{-i\theta} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \theta e^{-i\theta} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{e^{i\theta} - \cos \theta}{i} \right) e^{-i\theta}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \theta e^{-i\theta} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) (e^{i\theta} - \cos \theta) e^{-i\theta} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \theta e^{-i\theta} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \theta e^{-i\theta}$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \cos \theta e^{-i\theta} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \cos \theta e^{-i\theta} \dots (6b)$$

角度に依存しない条件として、結果は同じになるのだが、式は微妙に違って面白い。