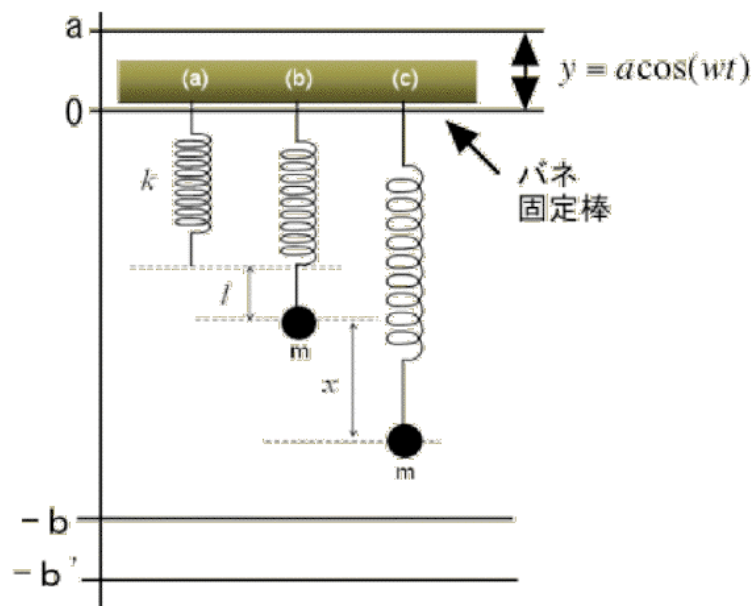


複素数

- ・ 我々の頃は高校(?)に入ると二次方程式が出てきて、そこで複素数が出てくる。
- ・ 先生からは「実在しない数、大小もない数」などと言われて先に進む。「虚数とは実在しない数であるが、数の理としては適ったもので絶対的かつ便利なもの、これだけは絶対に忘れないように」とでも言ってくればよいのだが、何もない。先生が、その心境に到達するのはずっと先の話なのかも知れない。
- ・ 例えば、複素数の $1+i$ 、 $2+i$ がある。後者から前者の引き算をすれば 1 となるのだから、後者の方が大きいと言いたいところだが、元が複素数であるからそうは言えないのである。いろいろな演算をすると、複素数というものからは実部や虚部が出てきて、実部や虚部に移ったり、逆に移動するのだが「数の理」としては適ったものなのである。
- ・ 簡単な三次式として $y = x(x^2 + 1)$ を考えてみよう。()内は明らかに最小値は 1 であるから、 $y=0$ を満たす答えは一つしかない。ところが、虚数解まで求めてみると 0 以外に「 $\pm i$ 」と言うものになる。
- ・ 実部は「 0 点はここ」虚部は「ただしこれがないと零にはならない」ということを示している。言い換えれば「零にはならないが最下点はここ」ということは示している。答えはここまで厳密に理解しておく必要がある。



左図を見てみよう。

(a) はバネが一端を固定されていて垂れている。

(b) のように、バネの先に重りをつけると「 l 」だけ伸びる。

(c) そこでバネ固定棒を $y = a \cos(\omega t)$ という上下の力で強制的に振ってみる。バネと重りが一体となったものは固有の振動数（重りを下に引っ張り放すとある周期での振動をはじめますが、これを固有振動数という）を持っているから、重りは単に $\cos(\omega t)$ のような振れ方をするのではなく、複雑な動きとなるはずである。

固有振動数と ω が一致すると、小さな a という力で振っていても、重りは大きな振動をする（これを共振という）。

a と ω を変えて行くと、ある a や ω では $-b$ より下の $-b'$ に達する事はあるかも知れないが、達しない場合もあることになる。

そこで重りが、 b' に到達する答えを見つけようとする。ある a や ω では答えはない。ところが、答えがない場合は、上のように虚数で解が出てくる。虚数部は「 b' に到達することはないが、最下点はここ」ということを示している。

- ・こんなことであるから「実在しない数」としてだけの教えは、いい加減な教えと言わざるを得ない。これだけ、ちょっと追加するだけで生徒の頭には、全然違う意識が残るだろう。
- ・微分方程式というものがある。これらの解を見つけようとするときに運動の方程式を考えて、解を見つけようとする。微分方程式の場合には、外部の力が加わった時からの過渡的なものを含む解が出てくる。ところが、虚数を使って求めた解というのは、長時間（と言っても何回か何十回の周期後にはほとんど収斂している）経過後の安定的な定常解と言うものが求まる。
- ・こんな事は最初から意識に入れておいた方がよいだろう。実際の工学で問題にされるのはほとんどが定常解である。自動車のエンジンをかけると、アイドリングに達するまでの一瞬だが、ボディーを振るわすような不自然な振動が起こる。これが過渡現象と言うものである。微分方程式はこのような現象も捉えるが、虚数によるものはアイドリングに達したものを捉えている、ということである。
- ・通常は複素数には $\langle i \rangle$ を使うのだが、電気技術者の場合は $\langle j \rangle$ を使う。電気の場合には電流を $\langle i \rangle$ で表すために、使えないからである。

こんなことから、複素数というものを数えられない数、比較できない数と単純に表現すべきではない。少なくとも、

- ・実数ではないが、必ず何かの意味を表す数、
- ・計算で実数と複素数を行き来するが、数理としては絶対に正しいもの、

などと説明すべきだろう。