

複素関数

この部分は、本でも見ていただくことを基本にして、初歩的な点は確認程度に進めることにした。と言っても、私にとっては50年振りのおさらいであり、思い出すのには少々苦労した。

- ・ 複素関数を学ぶ初期段階で留数 (Residue) と言うものを学ぶ。これがわからないと先に進めない。
- ・ ところが、留数を学ぶためには、閉曲線の内部に極がある場合に適用できる「ローラン展開」を理解しなければならない。
- ・ 更に、ところがだが、ローラン展開の理解には（私には）結構難しく、式の理解は後回しではしよって、そうあるものと考えて進まざるを得なかった。電気科であったので、覚えておけばよい。先に進むことがあると言うこともあっただろう。
- ・ であるから「根本的理解ないまま」と言うような点が、いまいち複素関数や関連の諸々が頭に染みつけない理由になっているのだと思う。難しい問題である。

《複素関数の積分など》

- ・ $z=x+iy$ で表される関数 $f(z)$ で、この関数を $u+iv$ （ただし u, v は実数とする）の積分は $dz=dx+idy$ で行われることになり、下記(1)の左辺のように示される。これを dx と dy で整理すると右辺のようになる。
- ・ ここで(2)のように P, Q を(2)のように考える。このように考える理由は、 dx と dy で整理した結果が、コーシー・リーマンの方程式が成り立つかどうかを調べたいからである。
- ・ 結果は(3)のようになる。

$$\oint_c (u+iv)(dx+idy) = \oint_c (udx + iudy + ivdx - vdy) = \oint_c [(u+iv)dx + (iu-v)dy] \quad \cdots (1)$$

$$P = u+iv \quad Q = iu-v \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(iu-v)}{\partial x} - \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad \cdots (3)$$

これは何を意味するかと言えば、コーシー・リーマンの方程式が成り立てば「線積分は経路に依らない一定値」であることを示している。

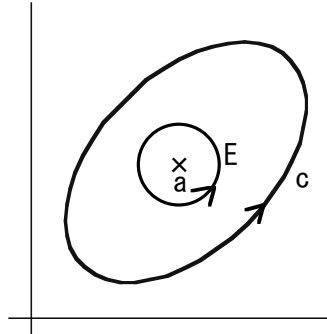
こんなこともおさらいである。

極 $\frac{1}{(z-a)^N}$

真性特異点 $e^{1/(z-a)} \dots (1) \quad e^{1/(z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-a)^n} \quad \dots (2) \quad (\text{左辺をテーラ展開すれば右辺となる。})$

留数 (Res:residue) A_{-1} を言う。

residue とは残余を言う。ある操作をしたときに「残るもの」と言うことでこんな言葉が使われているはずである。



《留数定理》

関数 $f(z)$ が $z=a$ に極または真性特異点を持つとする。このとき、 $f(z)$ はローラン展開される。ここで、 a のまわりを一周する経路 c に沿って $f(z)$ を積分する。

$$I = \oint_c f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(0)$$

である。

積分は下記のようになる。

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \oint_c (z-a)^n dz \quad \dots (1) \quad I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \oint_E (z-a)^n dz \quad \dots (2)$$

$$z = a + re^{i\theta} \quad \dots (3) \quad dz = \frac{dz}{d\theta} d\theta = ire^{i\theta} d\theta \quad \dots (4)$$

- ・ (1) はローラン展開そのものである。
- ・ (1) では積分経路が一般的で積分できない。正則な領域では、積分経路を変更しても結果は変わらないことを利用して、積分が可能かつ積分結果がわかる「特異点の回りを一周する円経路に変更する」。これがそれを (2) であり、経路は $c \rightarrow E$ になっている。
- ・ 点 a を中心とする半径 r の積分経路であり、極座標を持ち込んで解に結びつけた方がよいので (3) とする。(4) の変換は説明の要はないだろう。
- ・ ここで下記のように積分に入る。後は機械的であるが、

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \oint_E (z-a)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\theta})^n i r e^{i\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} (i r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}) d\theta$$

$$= i \cdot r^{n+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(n+1)\theta}) d\theta \quad \cdots (5)$$

$$m=0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(0) + i\sin(0)\} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = [\theta]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$m \neq 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m\theta) + i\sin(m\theta)\} d\theta = [\sin(m\theta) - i\cos(m\theta)]_{-\pi}^{\pi} = \{\sin(m\pi) - i\cos(m\pi)\} - \{\sin(-m\pi) - i\cos(-m\pi)\}$$

$$= 2\sin(m\pi) = 0$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & (m=0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases} \quad \cdots (6)$$

$$I = i \cdot r^{n+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(n+1)\theta}) d\theta = i \cdot r^0 \frac{f'(a)}{1!} \int_{-\pi}^{\pi} (e^0) d\theta = i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = i [\theta]_{-\pi}^{\pi} \cdot f'(a) = 2\pi i \cdot f'(a) = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(0) \quad \cdots (7)$$

- ・一周とは $-\pi$ から π までの積分となるので(5)のように式を変形して行く（これは規則）。
- ・ここで着目するのは(6)であり、この結果から(5)では、 $n+1=0$ 、即ち $n=-1$ のときだけ被積分値が残ることがわかる。
- ・そこで単一項だけが残る(7)の結果となる。

(6)だが、下記のように最後まで変数を残してしまうと結果が異なってしまうのだが、どうしてだろう？積分は*の印のように「先に値が定まったところで、値としておかなければならない」のだろう。

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m\theta)* + i\sin(m\theta)*\} d\theta = [\sin(m\theta) - i\cos(m\theta)]_{-\pi}^{\pi} = \{\sin(m\pi) - i\cos(m\pi)\} - \{\sin(-m\pi) - i\cos(-m\pi)\}$$

$$= 2\sin(m\pi) = 0 \quad \cdots (6?)$$

さて、考察だが何をやったのだろう。

- ・閉曲線内に極または真性特異点がなければ、線積分は0、
- ・内部の点 a に極または真性特異点があれば、閉曲線の周囲を a を左に見るように一周したときの積分値は「 $2\pi i \cdot \operatorname{Res}(0)$ 」になる、ということである。

2π は円周であるから、感じがわからないわけではないが、所詮複素平面であるから、これ以上感覚は湧かない。こうなるものと理解しておくしか方法がない。