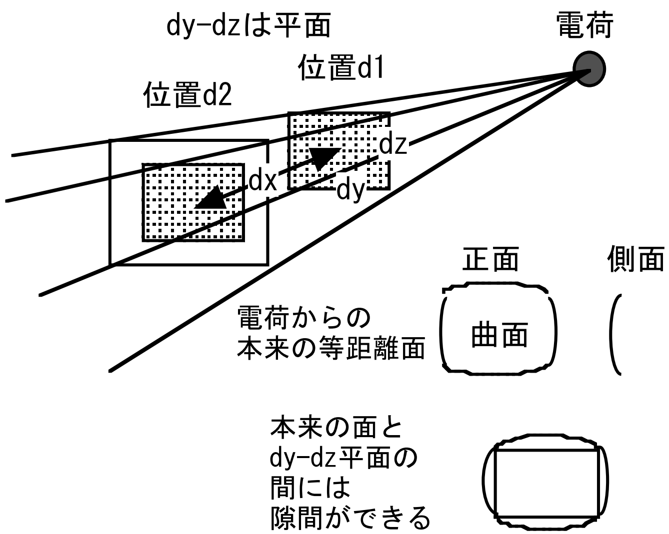
divergence（発散）と gradient（勾配）

温泉、電場、磁場、など湧き出したり、あるいは逆に吸い込んだりという現象はいろいろある。山に登ろうとすればルートの勾配などが気になる。また、それらの方向も知りたくなる。こんなものを扱うのが divergence や gradient である。

こんなイメージを持ちながら、先に進むのがよいだろう。

Divergence に入る前に、こんなことはしっかりと頭の底に置いておく必要があるだろう。

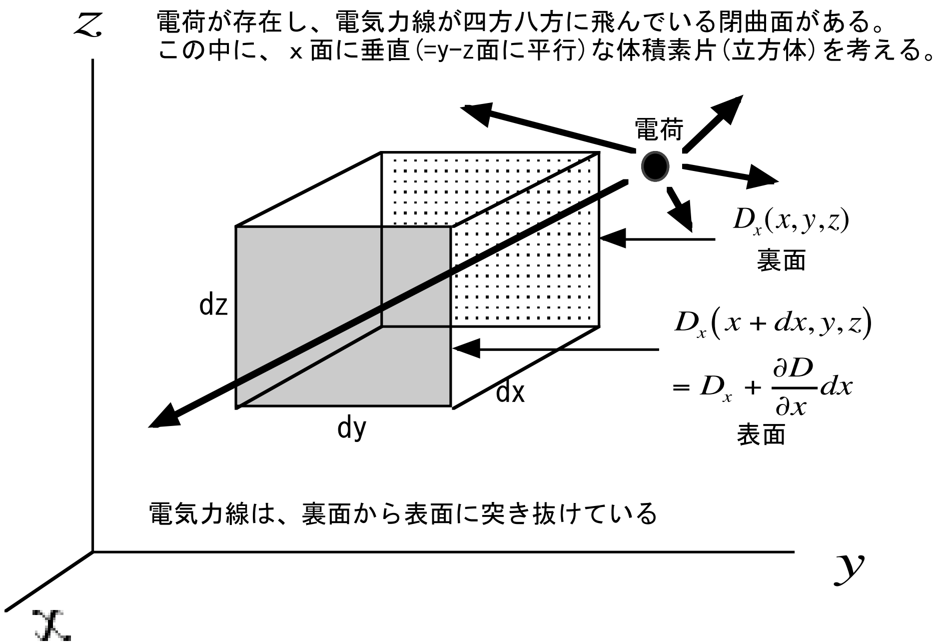
微積分面の注意点



- 左図は y-z 面と言う平面を通過する電束を例にしている。勿論、水の流れ出も何でもよい。
- ところが、電束の密度が同じ点というものは、電荷から等距離にある面であり、これは等距離の円球上の面である。
- y-z 面という平面を考えてしまうと、電束の密度はその平面上でも厳密には同じではない。
- かつ、dy,dz による長方形も、円球上を 100%カバーできるものではなく、古いテレビのブラウン管のように（若い人は知らないかも知れない）上図の下のように隙間が出来てしまうものである。
- これは多分数学的には、極言問題として、平面上の密度は同じ、隙間も塞がると言うように証明出来るのだろうが、私の興味ではないし、古希過ぎ人間としては時間がなくなる可能性があるから、そこはそうしておくことにしたいと思う。やって見れば簡単に収束は証明できるはずである。
- 注意点として、電荷から dx 離れた二つの y-z 平面を考えることになるのだが、面の面積は同じである。本来は、dx だけ電荷から遠くなれば面積は白抜きの四辺形のように広がるはずである。しかし、微小区間の面積増は,

$\dfrac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x} = s(x) + \dfrac{1}{2!}s'(x)(\Delta x) + \dfrac{1}{2!}s'(x)(\Delta x)^2 + \div\cdots$ のようになるので、極限値としては「面積変化は距離変化に比較して無視してよい」となるのである。

Divergenceの数学的な説明



左図のように閉じている閉局面（図示していない）の中に小体積素片（立方体）があり、小体積素片外にある電荷から出ている電気力線が立方体を突き抜けている場合を示している。電気力線は目に見えず、わかりにくいから水の湧き出しなどを例にしている場合もある。

・ 電気力線の密度は関数$D_x(x,y,z)$で定義している。時間要素は入れずに定常的に存在しているものとしている。
・ 裏面を通過している電気力線密度は$D_x(x,y,z)$であるが、表面を通過している電気力線密度は$D_x(x+\Delta x,y,z)$であり、これはテーラ展開の$D_x+\frac{\partial D}{\partial x}dx$のようになる（これは省略：なにがしかの参考を参照いただきたい）。

結局、dx だけ異なった位置の電束密度の差は

$$D_x(x+\Delta x,y,z)-D_x(x,y,z)=\frac{\partial D}{\partial x}dx \qquad \cdots(1)$$

となる。これに面要素としての dydz を掛けると（面積を掛けて体積素片とする）この立方体に含まれる電束成分（電束密度の差×面積＝電束）は$\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)dxdydz \qquad \cdots(2)$だけ異なることになる。

同様に他の面で実施すれば、$\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)dxdydz \qquad \left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)dxdydz \qquad \cdots(2')$

これらを加えあわせれば、全表面積分の

$\int D_n ds=\left(\frac{\partial D}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial z}\right)dxdydz \qquad \cdots(3)$となり、（ただし、左辺はガウスの定理の表記）これは結局小立方体から「湧き出る／あふれ出す／生み出される」電束を示している。Divergence とは$divD=\left(\frac{\partial D}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial z}\right)dxdydz \qquad \cdots(3')$のように定義したに過ぎないのである。ただ、これはスカラーである。発散の方向毎の強さなどを示す場合には、ベクトルでなくてはならない。

そこで、上記の式にベクトル要素を加えて、gradient を定義することになるのである。

　滑らかだが、勾配は様々な山の頂から、ボールなどを転がして見ると、ボールは一番勾配が急な方向に落ちようとするだろう。落ち始めれば慣性というものが発生しているから、一番急な方向というものが変わっても、直ちにその方向に向きは変えようとしても変わらず徐々に変わることになるだろう。
　山の頂からボールを転がすような場合には、垂直方向に働いている重力というベクトルは、垂直・横・縦の方向に分散され、合計すれば重力に等しくなっているのである。

これは式を書いてしまった方がわかりやすそうである。スカラー場における定義は、

$$grad f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \nabla f \qquad \cdots (1)$$

式をよく見ればわかるように、これは単に「３つのベクトルの和」であり、説明の要はないであろう。
∇は「ナブラ」と読み、面倒な式の記述を避けるための記号である。ギリシャの竪琴に似せた記号らしい。この∇も学生時代先生にいきなり「∇だから」なとと説明なく示され面食らった記憶がある。