

e（自然対数の底）というもの

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.7182818 \dots$ は知っている。でもこれがどんなところから出てきたのかは思い出せないでいた。60 歳くらいのあるとき「指数の微分」を思い出そうとしたときに、ここに突き当たることがわかった。

当初は、e などは知らないのだから、 a^x の微分を相手にするに決まっているはずである。

指数の微分は $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{(x+\Delta x)} - a^x}{\Delta x} \right) = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right)$ (1) の極限值を求めることである。

グラフの勾配などをイメージしてみれば極限值があるのはわかっているので、勝手にこんな方法を考えた。

$\left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = \alpha$ としてみるのである。そうして、これを次のように変形して行く。

$$\left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = \alpha \rightarrow a^{\Delta x} - 1 = \alpha \Delta x \rightarrow a^{\Delta x} = \alpha \Delta x + 1 \rightarrow a = (\alpha \Delta x + 1)^{\frac{1}{\Delta x}} \quad (2)$$

$$\alpha \Delta x = \frac{1}{t} \rightarrow \Delta x = \frac{1}{\alpha \cdot t} \quad (\alpha \Delta x + 1)^{\frac{1}{\Delta x}} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t \cdot \alpha} \quad (3)$$

もし、 $(\alpha \Delta x + 1)^{\frac{1}{\Delta x}} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t \cdot \alpha}$ (3) が存在するものとして、 $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ とすれば、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\alpha \Delta x + 1)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t \cdot \alpha} = e^\alpha = a \quad \alpha = \log a \quad (4) \quad \therefore a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = \log a \cdot a^x \quad (5)$$

とこのような結果となる。

もし、 $a=e$ であるとする、 $\log e = 1$ であり、 e^x は何回微分しても変わらないこともわかる。

さて、ここで $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ を求めることにしよう。

これは基本的には二項展開であるから、 $(a+b)^t = \sum_{r=0}^t \frac{t!}{r!(t-r)!} \cdot a^{(t-r)} b^{(r)}$

$$a=1, b=1/t \text{ とすれば、 } \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \sum_{r=0}^t \frac{t!}{r!(t-r)!} \cdot \frac{1}{t^r} = \frac{t!}{0!t!} \cdot \frac{1}{t^0} + \frac{t!}{1!(t-1)!} \cdot \frac{1}{t^1} + \frac{t!}{2!(t-2)!} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{t!}{3!(t-3)!} \cdot \frac{1}{t^3} + \cdots$$

$t \rightarrow \infty$ を考えれば分子と分母の t の次数が同じであることから、 t の影響はなくなり

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \sum_{r=0}^t \frac{t!}{r!(t-r)!} \cdot \frac{1}{t^r} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots = 2.81828 \cdots \quad (7) \text{ という収束する無限級数となる。収束は極めて早い。}$$

この級数の収束を明らかにするためには、これより大きな等比級数とその収束を考えればよい。

例えば、(7) の 7 項以降を考えてみよう。

$$\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \cdots = \frac{1}{6!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} \cdots \right) < \frac{1}{6!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} \right) = \frac{1}{7!} \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} \cdots \right) = \frac{1}{7!} \cdot \frac{7}{7-1} \text{ のように収束は証明できる。}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t \text{ はどうなるだろう。 } \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = e \text{ であるから、 } \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t}} = \frac{1}{e} = e^{-1} \text{ である。}$$

上の数列上は上記のような二項展開で、マイナスとプラスが交互に出てくることになるのだが、計算してみればそのようになるのはちょっと不思議で面白い。

よく、下記のようなインチキと思われる説明がある。

- ・ e も何も知らないのに「 e^x の微分は変わらない」といきなり説明し、
- ・ だからと、テーラ展開して上のような式を導出し、
- ・ 最後に $x=1$ として e を求めているものがある。

最初は e の存在もその微分も知らないのだから、本末転倒で、こんな教科書を書いている先生は極めて不思議に思う。

指数の微積分では、すぐに e が出てくる。こんな事から指数というものは自然界を制する基本数と思えるのである。一方我々が使っている整数などは便宜数、生活数と言えるのかも知れない。

$$\text{ここから、 } x = e^y \quad \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(e^y) = e^y = x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad y = \log(x) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d \log(x)}{dx} = \frac{1}{x} \text{ など直ちにわかる。}$$