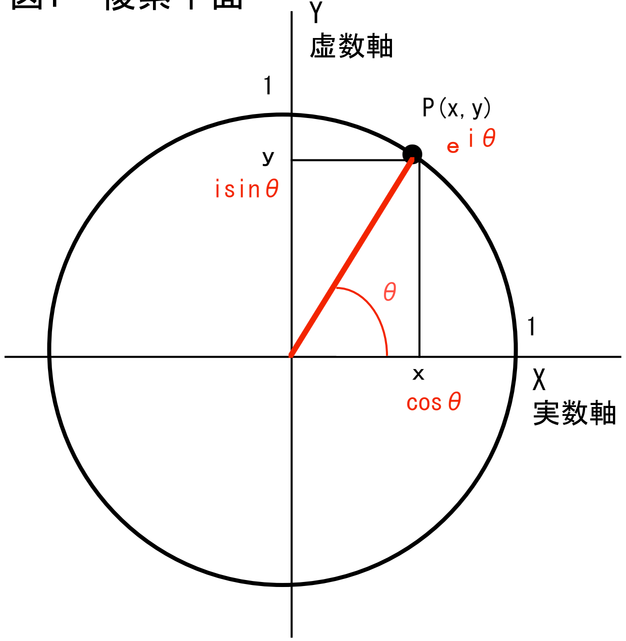
オイラーの公式

e がわかった、複素数というものは実際に存在しない数ではあるが「数の理」としては絶対的に正しいことがわかった。次は $e^{i\theta} = \cos\theta + isin\theta \cdots (1)$ であろう。

図1　複素平面



複素数を図上で考える場合には、図１のような実軸と虚軸の平面で考えることになる。半径１の円が描いてある。
まず、黒線や黒字部分だが、この円上の点Ｐは　$P(x,y)\cdots(2)$　のように示すことが出来る。ただ、y 軸は虚数であるから x 軸上以外は実在しない数である。P 点は $x+iy$ で示すことができる。

日常的に我々が使う座標には直交座標と言って x, y, z のように空間を三次元で表し、更に時間 t などを加えて四次元で物事を考えることが多く、関数 $f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ などと考えることが多いのだが、この関数の値は、図１の複素平面上では１点でしか表せずに、イメージをふくらませて考えるしか方法がない（描いても結構大変でわかりにくい）。

さてこの図に、円上の点 P から中心に線をひいて角度をθ（半径は１）としておこう。赤線と赤字部分である。
$x = \cos\theta \quad y = i\cdot sin\theta \qquad p = x+iy = \cos\theta + i\cdot sin\theta$ である。
θを変えて行くことはこの座標上では、円の上を移動する点Ｐと言うことができる。

さて　$e^{i\theta}$　と　$\cos\theta + isin\theta$　の結び付けである。e^x の説明でこれは何回微分しても変わらないこと、複素数の説明で x は虚数でも数の理としては正しいことがわかっている。
テーラ展開というものがあって（数学本で見て欲しい：どんな関数でも x^n の和で示せると便利だ）、これを利用すると、

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となる。

ここで $x \to ix$ としてみると、上式では交互に i かつ＋と－が出て下記のように整理できる。

$$e^x = \left\{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \cdots\right\} + i\left\{\frac{1}{1!}x^1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \cdots\right\}$$

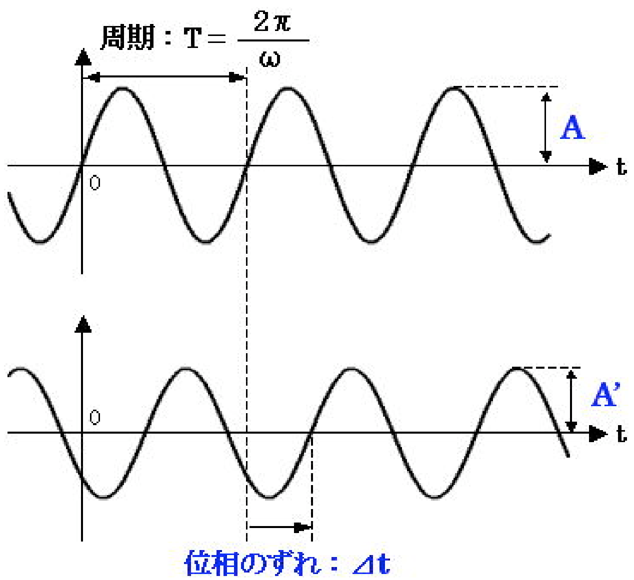
一方、テーラ展開で cos や sin は下記のようになる。

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}\cdots \qquad sinx = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11}\cdots$$

上の式を見比べ、$x \to \theta$ と置換すれば $e^{i\theta} = \cos\theta + isin\theta \cdots (1)$ となる。
更に、点 P は e^iθ と表現してよいことがわかる。

この式は不思議で、片々 n 乗してみれば、
$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + isin(n\theta) = (\cos\theta + isin\theta)^n$ となり、右辺を展開して実数部分と虚数部分に整理し、$\cos(n\theta) + isin(n\theta)$ との対応を取ってやれば、様々な三角関数の公式を得ることができる。
例えば n=2 ならば、$\cos(2\theta) + isin(2\theta) = (\cos\theta + isin\theta)^2 = \left(\cos^2\theta - sin^2\theta\right) + i(2sin\theta\cos\theta)$ である。これも数の理である。

点 P が円の接線方向の速度が変わらないで動いているのを「等速円運動」と言い、太陽系の多くの惑星はほぼこれに近い動きをしている（実際には楕円運動：速度も変わる）。ここでは反時計回りの方向をプラスとする。



今、等速円運動している点の Y 軸上の値を、時間を横軸にして表現してみると。左図のような波形となる。等速の回転運動を時間でみたこれが sin と言うものであり、cos は波形がずれているものである。これら波形は「最も自然かつ基本的な波形」と言えるものである。周期と時間の関係は T=2π/ω（各速度）となる。

さて、この $e^{i\theta}$ と式は電気・機械・その他様々なところで使われる。機械でも電気でも回転や振動現象を扱うことが多い。例えば自動車のレシプロエンジンは、ピストンの往復運動をクランクシャフトで回転運動に変えているし、発電機は回転を電気に変換している。ピストンの動き、発電された交流などはほぼ左のような動きをしているのである。「ほぼ」と書いたのは、厳密には少々違うからである。
$e^{i\theta}$ が頻繁に利用されるのは、このような運動を扱う場合には、sin や cos などを使うより $e^{i\theta}$ を使う方が、（e^x は微積分しても変わらないので）微積分が簡単で便利な場合が多いからである。

実際の波形には、こんな綺麗なものは少ない。そのようなものは、nω（n=1,2,3,・・・∞）と言うものを含んだものの複合波である（数学上はフーリエ級数というもので表される）。地震波などは一見、左図のような波形に見えるのだが、よく見ると結構違う。と言うことは、大きさや周期など複合的な成分を多く含む波であることを示している。建物などは、固有振動数というものを持っており、共振というものによって、小さな連続的な外力でも大きく揺れる場合がある。波の大きさや成分によって様々な影響を受ける。影響を受ける度合いも場所も成分によって違ってくる。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

《過去》

- 中学時代に sin,cos,tan などを習う。直角三角形のここと「ここの比を sin と言う」だけである。わからなくても等速円運動を出してくれれば少しは深みも感じたのかと思う。√の計算程度はしっているが「三角関数の値はどうして求めているのか？」と言う疑問は残ったままだった。
- 高校時代は、大学受験準備の遅れの取り戻しに精一杯、三角法公式も機械的に覚えたはずである。
- 大学は電気だったから、ここでやっと表っつらだけわかった。しかし、現実社会（技術系だから仕事の場）でどんな時に使われるのかはほとんど聞いたことはなかった。
- 会社に入ったら「プール代数」職場だったが、ディジタル化に入り少々興味も戻り、
- 仕事では全く使わないが「趣味で」と言うことである。
- ある文化系の人から「ディジタルと言うものがどうもわからない」と言われたことがある。ある人から「ディジタルなんて言っていても、基本はアナログだよね」と言われ、同調したこともある。多少は数学がわからないとわからないことなのである。