

フーリエ級数

- ・ フーリエ級数というものがある。どんな波形でも連続的かつ規則的なものであるならば $\sum a_n \sin(n\omega t)$ のような級数で表すことができるというものである。
- ・ これは、電気の基本中の基本の一つでもあるのだが、音などでも全く同じ事であるので、和音などでも利用できるものである。地震波にも応用できるはずである。
- ・ 昔ある友人が「入社していろいろな学校の人間と混じったが、フーリエ級数を教えていない大学があるんだ」と言うのを聞いてびっくりしたことがある。そんな学校は疑問である。
- ・ 感覚を養うために、まず計算結果から示してしまおう。三角関数には位相などもあるが、今これは考えないことにして

$$S = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)\}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \cos(\omega t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t) + \frac{1}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{4}\cos(4\omega t) + \cdots + \frac{1}{n-1}\cos((n-1)\omega t) + \frac{1}{n}\cos(n\omega t) + \cdots \quad \text{を考える。}$$

$$\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{4}\sin(4\omega t) + \cdots + \frac{1}{n-1}\sin((n-1)\omega t) + \frac{1}{n}\sin(n\omega t) + \cdots (1)$$

- ・ これを Microsoft Excel で計算して、グラフとしたものを下記に示してみよう。昔はこんな計算も安直に出来なかったが、今はあっさり出来てまず感覚をつかめる。ただ、無限級数と言うこともできないので計算は $\sin, \cos 10$ 項までとしている。
- ・ 偶関数 $f(-x)=f(x)$ と奇関数 $f(-x)=-f(x)$ があり、 $\cos$ は前者、 $\sin$ は後者である。以下の波形の合成では、この差も大きな波形の違いとなって現れる。

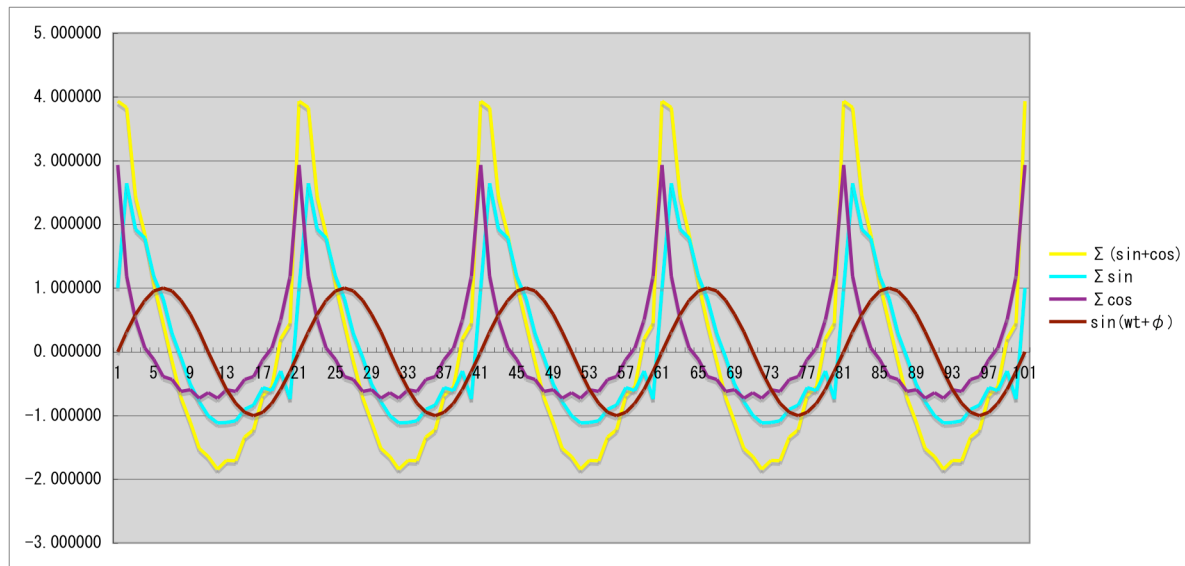


図 1

左図は(1) そのものの計算結果である。
基本波である $\sin(\omega t)$ と一緒に示している。

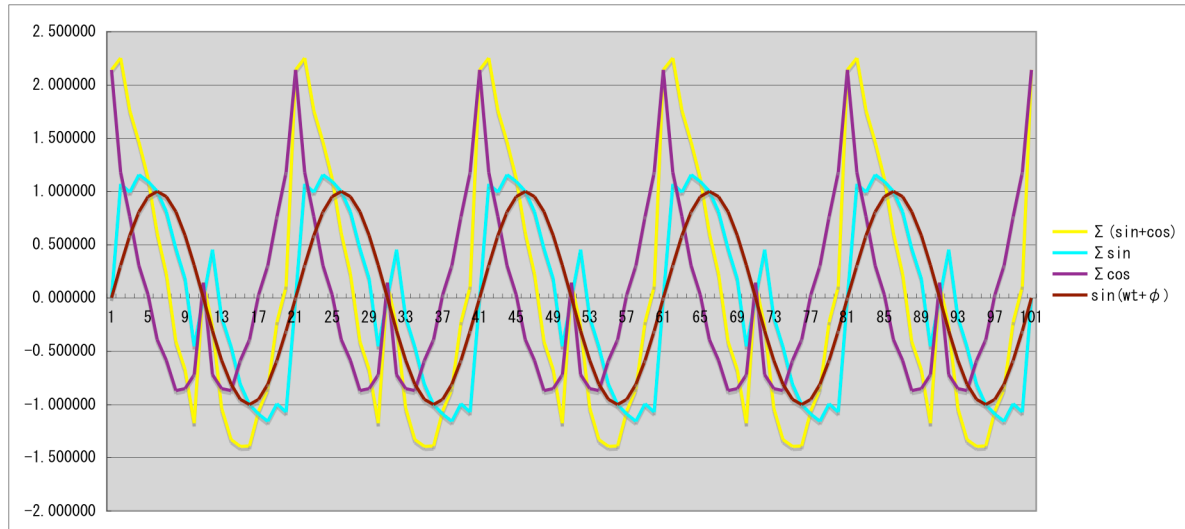
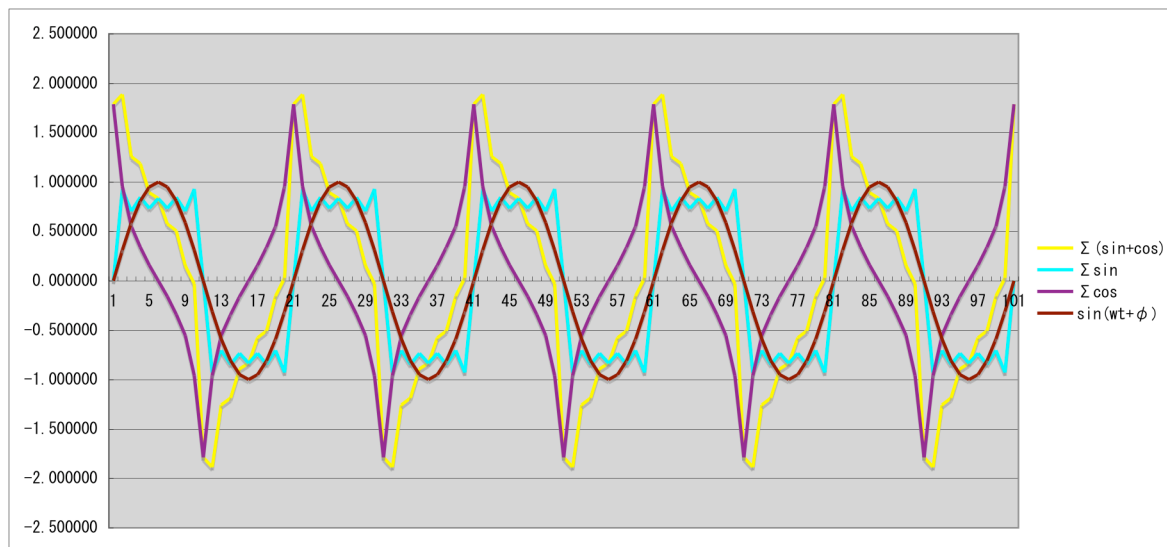


図 2

これは基本波に(1)の式の偶数項だけとったものを合成した結果である。



いので、意味ある範囲で近似利用している。

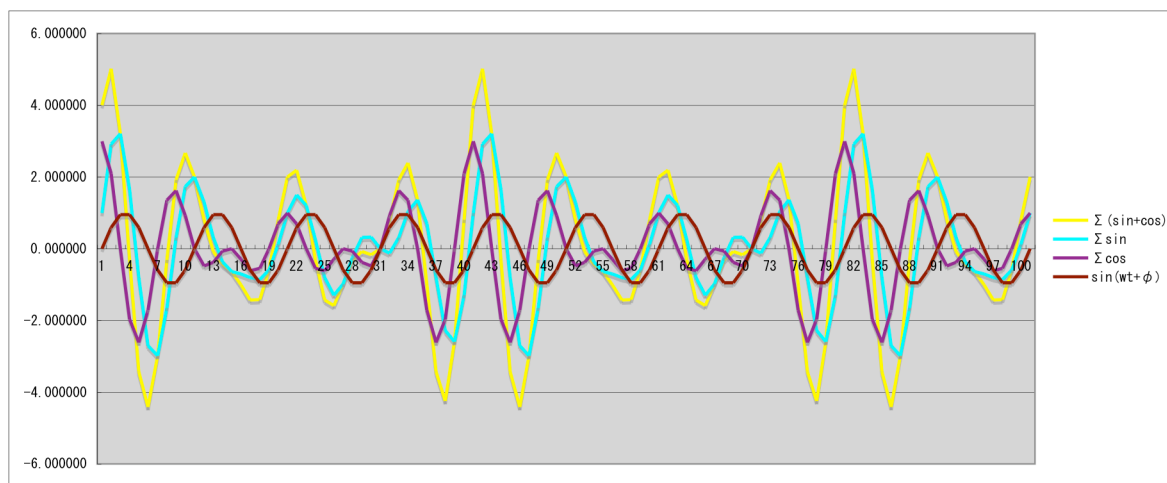


図 3

これは、基本波に奇数項だけを加えたものである。
sin はつぶれて山の頂が平になった矩形波と言えるだろう。

こんなことから、フーリエ級数というものが何となくつかめるであろう。言い換えれば「この級数は規則的な波形を無限級数で近似するもの」と言える。

こんなことで、

- ・ 「デジタル！ デジタル！ なんて言うけれど、所詮基本はアナログなんだよね」という言葉が電気屋同士では飛び交うこともある。
- ・ また、実際の電気物は無限大のものは扱えない

図 6 ドミソの三和音

ついでだから基音に対し 1.25 と 1.5 倍の Hz を持つ三和音の合成を示しておこう。sin と cos で波形は違うが、人間の耳には同じに聞こえる。

いよいよ式の誘導である。この誘導は比較的簡単である。連続など細かい点の説明はここでは避けておく。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \cdots (2)$$

係数を求めるに当たり、下記は知っておかなければならない定理である。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) dt = \int_0^T \sin(n\omega t) dt = 0 \cdots (a) \quad \int_0^T \cos^2(n\omega t) dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t) dt = \frac{T}{2} \cdots (b)$$

$$m \neq n \quad \int_0^T \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = \int_0^T \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = 0 \cdots (c) \quad \int_0^T \sin(n\omega t) \cos(n\omega t) dt = 0 \cdots (d)$$

具体的な説明は避けるが、(a)は sin も cos も上下対称だから1周期積分すれば0、(b)は(a)の二乗だからプラスになり値が出るが、倍角の公式で積分が簡単にできる。(c)は加法定理により純粋な sin に変換でき積分が簡単に出来る。(d)は倍角定理で簡単である。

上の式を頭に置いて、まず辺々を積分すると、

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T \frac{1}{2} a_0 dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} dt = \int_0^T \frac{1}{2} a_0 dt = \frac{a_0 T}{2} \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \cdots (3)$$

これは電気などでは直流分になる。上下対称の関数では一周期の積分は当然零になります。電気通信などで信号を正負に振って送信するのが一般的なのですが、0から正方向だけに振ってやるとこの直流分が出てしまい、それは電力の損失となるので、正負に振るようにする。

次に、両辺に $\cos(\omega t)$ を掛けて辺々積分すると、

$$\int_0^T f(t) \cos(\omega t) dt = \int_0^T \frac{1}{2} a_0 \cos(\omega t) dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\omega t) \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} dt \cdots (4)$$

上の(a)～(d)でよく考えてみると、(4)の式で残るのは、ただ1項だけなのです。それは、

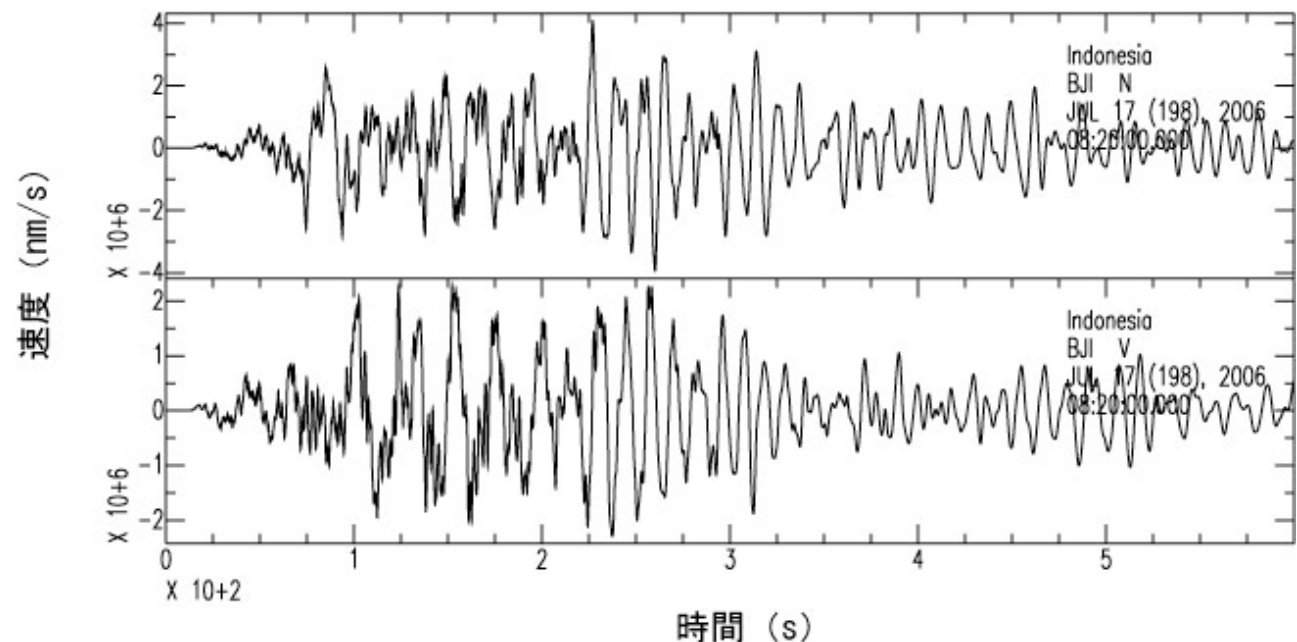
$$\int_0^T f(t) \cos(\omega t) dt = \int_0^T \frac{1}{2} a_0 \cos(\omega t) dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\omega t) \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} dt = a_1 \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = a_n \frac{T}{2} \quad a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega t) dt \cdots (4')$$

こんなことで、 $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \cdots (5-1)$ 、同様にして、 $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \cdots (5-2)$ のように求まる。

いろいろな $f(t)$ に、これをやって行けば係数は求まる。

$f(x)$ だが、 $f(x) = \pm 1 \cdots (e1), x \cdots (e2)$ (e1)は矩形波、(e2)は鋸波、など様々である。

地震波などは、正弦波というより、複雑で鋭い波形をしているように思える。これは、地震波というものは周期が異なる波の混合である複合波と言える。建物は固有振動数を持っていて、地震波と固有振動数が合致すると大きく揺れる（ブランコでタイミングを合わせれば大きく揺らすことが出来るのと同じ）。また、建物の固有振動数は建物の部分部分などでも固有振動数をもっているでしょう。ですから、様々な固有振動数を持っていると言える。複合波である地震波と建物の複数の固有振動数の様々な合致で複雑な揺れとなるのは当然のことと言える。地震や建築学会がどの程度こんなものを考えているのかは極めて疑問です。なぜならば、東日本大震災直後にテレビである大学の先生が、まるで初めて知ったかのごとく、複合波で高層建築の中階部分が一番揺れがわかったなどの説明をしていたからです。「電気屋なら学生でも知っている」と思いました。



実際の建物の建築で、こんな複雑なものを検討・計算することはできないでしょう。ですから、建物は高くせず、極力強固に建築するしか方法はないはずです。私は建物で生計を営んでいますが、こんなこともあるので建て始めた 40 歳頃から、7 階程度の建物で通し（この程度なら竹がふにゃふにゃ揺れるような揺れ方をせず、地面と一体で揺れる）、設計士には「この地で最後に倒壊する建物にしておいて」とからかっています。免震などで、高い位置に重い振動相殺のシステムを置いている建物があります。しかし、建物は重くなり、複合波では害になる場合もあるでしょう。免震は横揺れ対応が基本でしょう。直下型では逆に弱いかも知れません。

音響効果の改善でもこの関数を思い浮かべたことがある。ある部屋の音響効果の改善のために、音の反射を高めようとして、反射板を設置しようとした。板の大きさ・厚さ・固さ・方向、音の大きさや高・中・低、など様々な影響要素が考えられるので、よほど経験豊かな専門的な人でない限り、答を見つけるのは難しいのは明かである。少々の人を頼りにしても多分当てにならないだろうと考え、板などは自分の未熟な感覚だけで決め、工事を依頼した。音響などでは「高速フーリエ変換」などという言葉が出てきていた。一般の電気通信の方がはるかに高速、何故音響で高速というのかはわからない。