

Green の定理

一つの定理でも様々な証明法がある。初心者にとって有り難いことは、如何に基礎的な範囲で易しく説明するかである。数学の本など書かれている人の中には、簡単なものを初心者には難しい方法で説明している場合がある。それは本末転倒と言うものであろう。そのために、あちこちの数学ジャンルが必要な説明は避けなければならないだろう。最もシンプルなものを探した結果、自分にわかるものはこの程度と言うことであつた。

この定理の説明にはほとんどの場合、いきなりこんなことから始まり、機械的に式を誘導して終わる。

xy平面で、単一閉曲線C(自分自身と交わらない閉曲線)に囲まれた領域をD とします。C は、進行方向に対してR が常に左側にあるような向きとします。このとき、関数P、Q に対して、

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (P dx + Q dy) \quad \cdots (1) \text{ が成り立ちます。}$$

これをグリーンの定理といいます。線積分と2重積分を変換する定理です。

とこんなことである。それで私には何だかよくわからないまま通過してしまったものである。

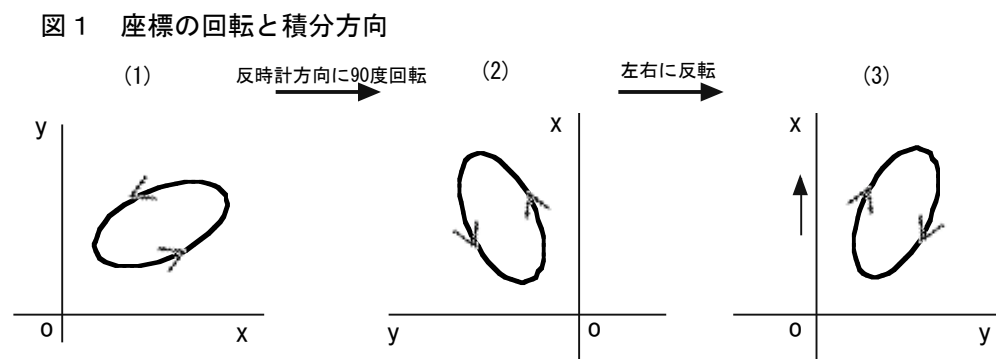
私の頭には、

- ・ 何故変換定理が必要なのか？それは「変換しなければ答は出しにくい」ということであるだろう。
- ・ 閉曲線は一つの x あるいは y に対して二つの値が存在してしまうために、P, Q に分けて考える。
- ・ P, Q は各々単独でも $\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (P dx)$ と $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \int_C (Q dy)$ が証明できるのだが、双方の和でなければ意味

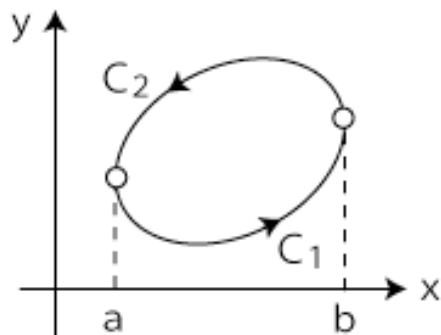
がない。

- ・ 結果の和をとって一つの定理としているのは、この前に理解していなければならない Gauss の定理の定義からである。
- ・ 何故Pは符号が逆になるかだが、左図のように xy 座標で作成したものを反時計方向に $\pi/2$ 回転し、更に左右に反転したものであり、これが yx 座標となる。図 1(3)で回転方向が逆になっているのわかるだろう。

こんな追加文章が欲しかったと言うことである。

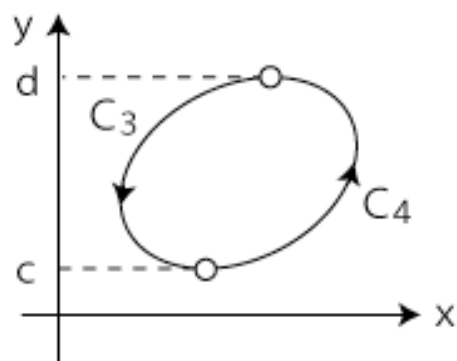


こんなことを理解すれば、後は機械的な計算だけである。



下図のような閉曲線で、 $C_1:(x, y_1(x))$, $C_2:(x, y_2(x))$ とすることにする。

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right\} dx = \int_a^b \{P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\} dx = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \\ &= -\oint_{C_2} P dx - \oint_{C_1} P dx = -\oint_C P dx \quad \cdots (2)\end{aligned}$$



同様に $C_3:(x_1(y), y)$, $C_4:(x_2(y), y)$ とすれば、式を誘導しなくとも直感的にわかるのだが、

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right\} dy = \int_c^d \{Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)\} dy = \int_c^d Q(x_2(y), y) dy - \int_c^d Q(x_1(y), y) dy \\ &= \oint_{C_4} Q dy + \oint_{C_3} Q dy = \oint_C Q dy \quad \cdots (3)\end{aligned}$$