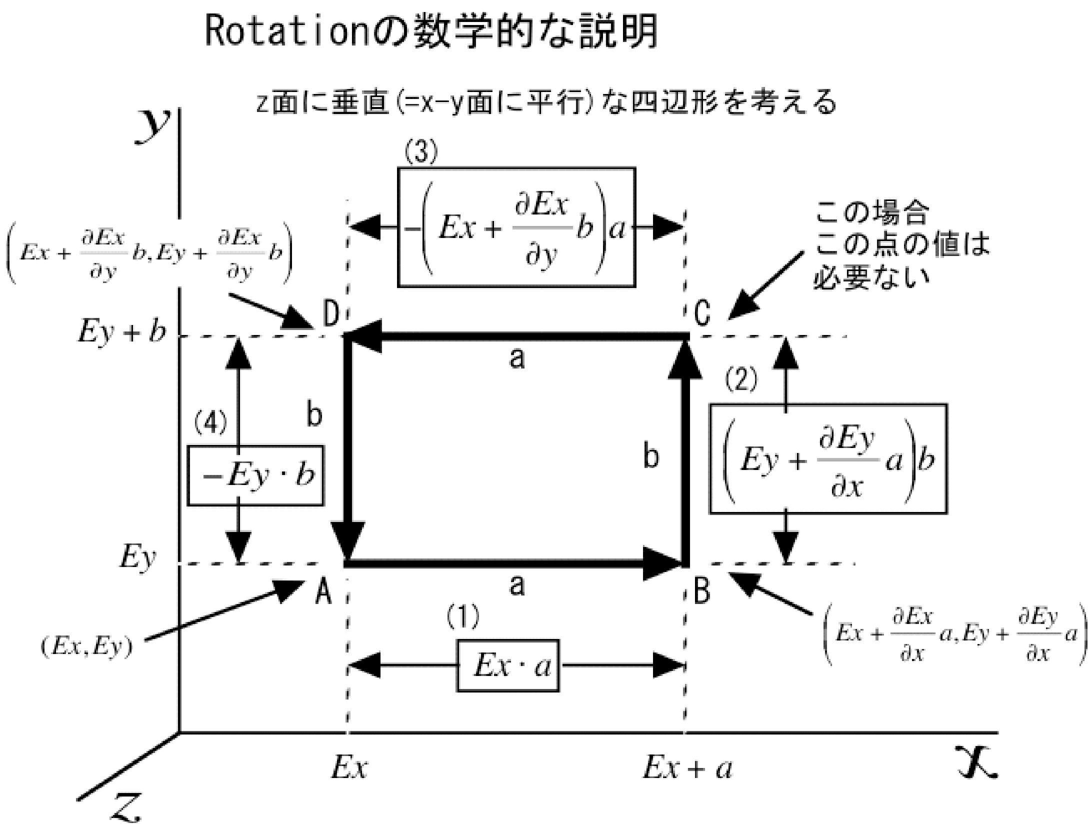
Rotation（回転）

ベクトルには「極性ベクトル」と回転軸を有する「軸性ベクトル」がある。電気系の人なら、直感的にわかるものだが、最初に強く意識しておいた方がよい。
極性ベクトルは、ベクトルの方向は変わらずに常に接線方向に働こうとするものである。ところが、軸性ベクトルの方は、ベクトルは常に方向を変えながら回転している。手前から先方向に電流が流れる場合には、左回転の磁界の回転ベクトルが発生する。

Rotation は私には取っつきにくいものの一つに思える。よくよく考えると、目に見えない電磁気の場合は別としても、現象を目にするのは下記のようにいろいろある。

・ 川の土手の変形しているようなところで、水が回っているのを水に浮いているゴミの運動で見かける。
・ 鳴門の渦潮は多分、満ち潮が終わり引き潮になる時に、満ち潮の慣性からの残留と引き潮の開始という逆方向の流れのぶつかり合いから発生するものだろう
・ 学生時代に観念的にわからないと先生に聞いたら「地球には空気がある、地球は自転している。しかし、空気は基本的には自転していない。だから、地表と空気の摩擦でこすれ回転が生じる」と説明され、わかったような気になったのだが、数学上までは完全に理解し得なかった。古希過ぎの最近、学校に残った学友に「div,grad,rot などいつ使うのだ」と質問したら「シミュレーションなど」と返ってきた。予測に使い、システム開発し、現実に合わせ調整しものをつくると言うことだろう。
・ ベルヌーイの定理というものがある。物の側面を流体が流れると、物体が引っぱられる現象である。川の土手石などが洪水で剥がされるのは、ただ摩擦だけではなく、こんな力も働くからである。飛行機が飛行するのも、この現象と言われている。しかし、よく考えてみると物体の側面に流体が流れれば、摩擦による流体の速度低下が発生し、物体から遠い流体との速度差を生じて、流体がねじれる現象は容易に想像できる。これも Rotation なのであろう。
・ こんな風に Rotation はいたるところにある現象である。

Rotationに入ろう。



《条件説明》

　Rotation は電磁気学上など（流体力学でも使うなどは聞いたことがある）の数学の便宜上から定義されたものではないだろうか、と言うようなことは理解しないといけないだろう。

　これから先は、左図を眺めながら進んでいただこう。

- ここで「線積分」と言うものが出てくる。x-y-z 上の三次元座標上で、ある線分（例えば E(x, y, z)と言う関数）に沿って積分する、と言うことである。
- これを「線長の積分と誤解してはならない」。
- どう理解するかと言えば、例えば図では同じ太い矢印で書いてある線だが「一様ではなく位置によって重みが違うものが E(x, y, z)と言う関数で指定されていて違うもの」とでも考えていただいたらよいだろう。
- この太い矢印線に沿って点 A から、反時計回りにB, C, D と一周して点 A に戻ってくると言う線積分である。
- 太線の矢印で囲まれた面は Z 軸方向を向いている。今、この図で調べようとしているのは x-y 面の z 軸から見た rotation（回転）$(rotE)_z$ である。ある軸から見た rotation を調べようとした場合は、他の２軸の数式となることが予めわかる。
- 「なぜ反時計回りか」と言えば、陸上競技のトラックが何故そうか、というように、これも数学上の定義からの問題だけである。

《考え方の説明》

- a-b の線(1)であるが、x 軸方向にしか移動しないから、x だけが変化する関数で y と z は一定値である。それで Ex と表しており、この場合の線に沿った積分結果は「E(x)・a」であることは容易にわかる。と言いたいところだが、早合点は禁物である。本当は x 軸に沿って動けば線の重みは変化している。ただ、微小区間だから変化しないと考えるのである。
- B 点はテーラ展開の第２次項を利用した近似で$\left(E_x+\frac{\partial E_x}{\partial x}a\right)$となるのだが、線分の重みには更にａがかかり、重みが変化した B 点での最終値をとっても$\left(E_x+\frac{\partial E_x}{\partial x}a\right)a$となり、$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}a\right)a$ 部分は微小区間で極限を取って行けば所詮消えてなくなり、重みは変化しないとしているのである。極言をとればこれは正しいと理解することになる。
- 次の b-c の線(2)に沿った積分だが、今度は z,x は一定値だが y が変化する関数である。しかも点 B は点 A より a 右にずれており、縦の線全体が点 A とは微妙に異なった値であり、それが線分全体に効いている。であるから無視できずに Ey に(∂Ey/∂x)a を加え、それに b の線分長を掛け、$\left(E_y+\frac{\partial E_y}{\partial x}a\right)b$としている。微妙とは言え、全体的に違うのだから無視はできず、このようにしているのである。
- 次の c-d と d-a の線(3)(4)に沿った積分だが、(1)(2)の方向とは逆だからマイナスになる。C 点の座標は表示されていないが必要ない。何故ならば、まず、(4)の線分を(1)同様に考えてみれば「-Ey・b」となる。
- (2)の線分同様に(3)も考えていただければ、(3)はお分かりいただけるだろう。
- テーラー展開とそれによる近似は初歩的なものだから、どこかで調べていただければすぐにお分かりいただけるだろう。ただ、(1)と(3)の「Ex・a」は y の値が違うのだから、完全には同じではないはずで a が微小だから同じとしてよいということである。

線を一周した積分として(1)∽(4)を加え合わせてみれば、

$$E_x\cdot a+\left(E_y+\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\cdot b-\left(E_x+\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cdot a-E_y\cdot b=\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\cdot ab \qquad (1)$$

となる。これには ab と言う面積要素が加わっているから、これを ab で割り消去すれば、密度だけが残り$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$となる。これを、$(rotE)_z$と定義する。同様に、x や y 面で実施してみれば、下記となることはお分かりいただけるだろう。

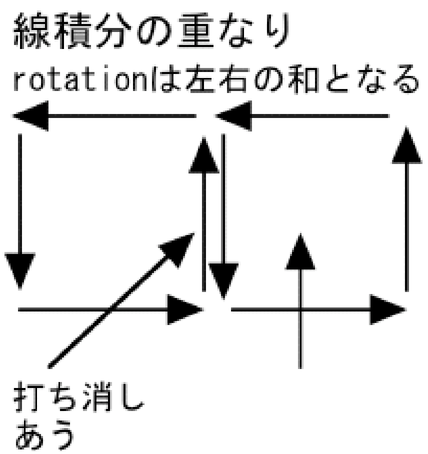
$$\left(rotE\right)_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \qquad \left(rotE\right)_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \qquad \left(rotE\right)_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \qquad (2)$$

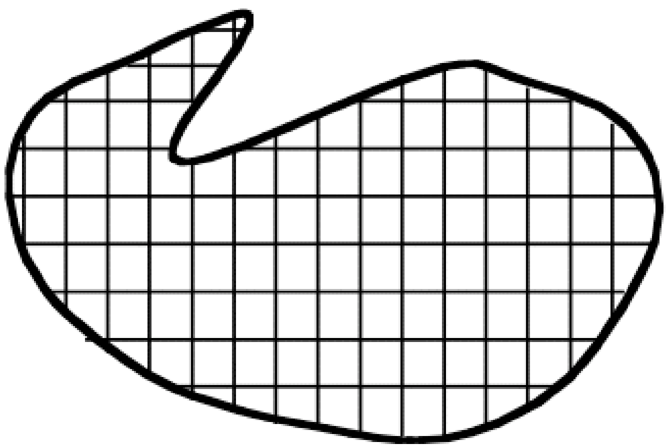
行列式を使えばこんな記述も出来る。覚えやすいだろう。

$$\left(rotE\right) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \qquad (3)$$

最初の図で、矢印で囲まれた中に-z 軸方向から z 軸方向に、電線を通し直流電流を流す。z 軸から-z 軸方向に左回転（図の矢印をと同じ左回転）の磁界が発生するから、流した瞬間には磁界の変化（磁界 0→電流値に相当する磁界）で rotationE が発生するが、電流の定常化によりすぐになくなってしまう。電流を切れば、逆の変化が起こる。

ここまでたどり着いたが、回転なのに四辺形のモデルを考えるのはちょっと違和感がある。Rotation などというと、回転だから円を左回りで一周の線積分などしたくなる。何故四角形で考えたのか。これは、円では計算がし難い、円では空白部分が出てきてしまい、概念的な計算が複雑な上、空隙を埋めることが容易ではない。いくら円を微小に縮小しても空隙との比率は一定だから面の完全な網羅とはならないからである。四辺形ならば、下記のように空白部分なく面は埋まる。どんな形状のものでも四辺形を細分することにより極限に近づけることができる。

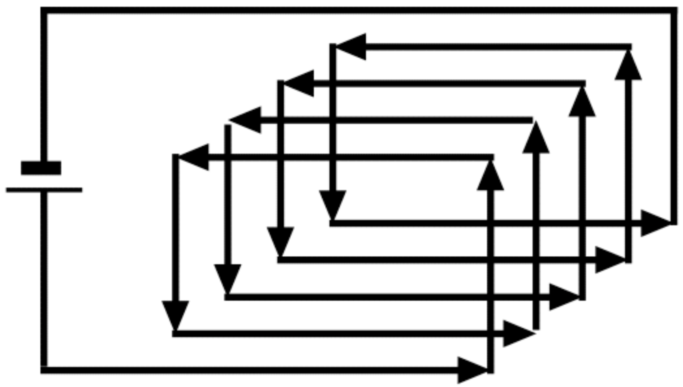




上図を考えると重なり合う部分は相殺され打ち消しあい外部だけが残る。どんな面でも右の図を考えればやはり外部だけが残る。

⑵の式はいろいろなところで頻繁に出てくる。この完全な理解なしに先に進んだものは、皆中途半端な理解となってしまう。勉強している人々は、最初だけは、こんな疑問を持ちながらやるべきなのだろう。

　ここで式を眺め熟考しておく必要があるだろう。
一回り積分したら何か値が出てきたが、この値は何だろう。
一回りの重み、即ち「(一回り）回転の重み（密度)」とでも考えれば何か実態に即したもののように思える。



上図のように磁石で巻数を増やすと、強い磁石ができる。電磁方程式に rotH=∂D/∂t+i がある。直流の場合には∂D/∂t=0 であるから、rotH=i となる。磁石の鉄心への巻数を n とすれば、rotH=ni となり磁界の強度は rotH は n 倍となる、と思ったのだがよいのだろうか。