展開の基礎知識 1

　複素関数では、テーラー展開・マクローリン展開・ローラン展開がある。これらはいろいろなところで利用される。展開というのは「展開式への変換」「かつ、例えば $f(x) \to \sum A_n (x-a)^n$ のような展開式への変換」と言うことを強く意識した方が、理解が容易かも知れない。
　実関数で、テーラ展開は、「複雑な関数を x のベキ乗の級数で示せれば便利ということからの式である」と本で見たことがある。この式はどんどんと片々微分を繰り返し、微分後に x=0 を入れて行けば係数は求まる。

ある f(x)が　$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots \qquad \cdots(1)$　のような形式で表されるとすると、

- まず、x=0 とすると $f(0) = A_0$
- 次に 1 回両辺を微分し　$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 \cdots + nA_n x^{(n-1)} + \cdots$　ここで、x=0 とすると $f'(0) = A_1$
- 更にもう 1 回微分し　$f''(x) = 1 \cdot 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x \cdots + (n-1)nA_n x^{(n-2)} + \cdots$　ここで、x=0 とすると $f''(0) = 1 \cdot 2A_2$　$A_2 = \dfrac{f''(0)}{1 \cdot 2} = \dfrac{f''(0)}{2\,!}$
- 同様に、順次これを実施して行くと、

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \cdot x^n \qquad (2) \end{aligned}$$

となる。

もし、$f(x) = e^x \qquad a = 0$　であるならば、$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$　であり、$f(x) = e^x = 1 + \dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{1}{3\,!} + \dfrac{1}{4\,!} + \cdots = 2.71828\cdots$
のようになる。これは「テーラ展開」と言い、簡単なものと言えるだろう。
ところが、突然当たり前のごとく

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \cdots(3)$$

と言うような式が出てくることになる。左辺が $f(x-a)$ なら、素直に納得できるのだが、$f(x)$ であるので私の場合はここで長く惑わされることになった。

しかし(1)の式の右辺の x を x-a に置換した結果展開式が変わるのだが、所詮 $d(x-a) = dx$ であり、左辺は別物の $g(x)$ とでもして考えればよいのである。さらに、これを(1)と同様に実施して行けば、(3)も成り立つことがわかる。即ち、左辺は $g(x)$ ではなく $f(x)$ のままとしておいてよいのである。

(1) を $f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_n(x-a)^n+\cdots$ のようにして、同様に辺々の微分を繰り返し、

$x=a \qquad f(a)=A_0$

$f'(x)=A_1+2A_2(x-a)+\cdots+nA_n(x-a)^{(n-1)}+\cdots \qquad x=a \qquad f'(a)=A_1$

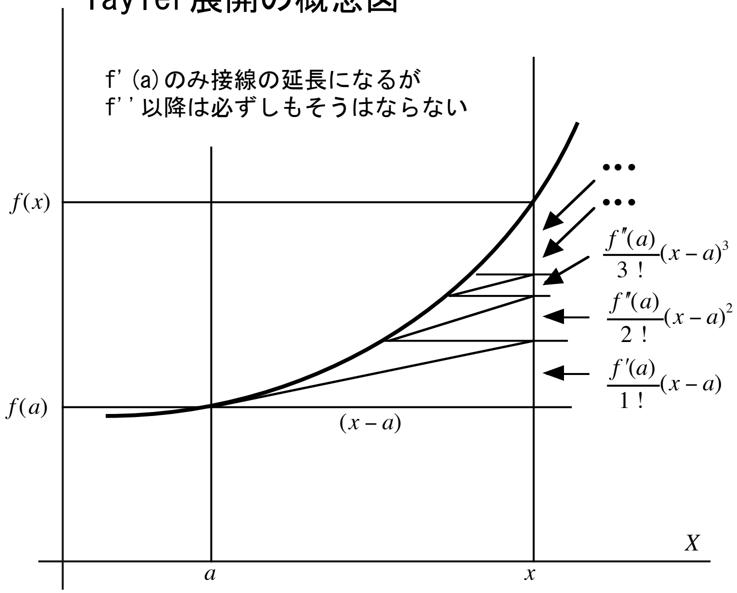
$f''(x)=2A_2+2\cdot 3A_3(x-a)\cdots+(n-1)nA_n(x-a)^{(n-2)} \qquad x=a \qquad f''(a)=2A_2$

…

のようにして行けば、 (3) は (1) と同様に成り立つことがわかる。
ところが、これが複素関数相手だとわかり難くなる。複素数の場所で、複素数においても何事も「数の理としては正しい」と書いている。x が虚数の場合は、左図のように書くことは出来ないけれども、「数の理」を信じるならば、予め、複素数においてもこれは正しいと思うことも出来るだろう。

式この図でわかるようにある $f(a)$ がわかっており、そこから x 軸を a 移動したとき、 $f(x)$ はどのようになるのかを示す式と思えばよいだろう。

Tayler展開の概念図



実関数で、実際に(3)を計算してみよう。
$f(x)=x^3$でやってみよう。

$f(x)=x^3 \qquad f'(x)=3x^2 \qquad f''(x)=2\cdot 3x \qquad f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3 \qquad f^{(4)}(x)=0$

$f(a)=a^3 \qquad f'(a)=3a^2 \qquad f''(a)=2\cdot 3a \qquad f'''(a)=1\cdot 2\cdot 3 \qquad f^{(4)}(a)=0$

$$f(x)\left(=x^3\right)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=a^3+3a^2(x-a)+\frac{6a}{2}(x-a)^2+\frac{6}{6}(x-a)^3$$

$$=a^3+3a^2(x-a)+3a(x-a)^2+(x-a)^3=x^3 \qquad \cdots(4)$$

のようになる（a がある項はすべて消えてしまう）。一度はこんな計算でもやってみて、数式上だけではない実感を持っていた方がよいだろう。

$x-a=t$とでもしてみれば、(4)は

$$a^3+3a^2(x-a)+3a(x-a)^2+(x-a)^3=a^3+3a^2t+3at^2+t^3=\left\{t+a\right\}^3=\left\{(x-a)+a\right\}^3$$

となるから、こんな計算をしてみると、この式はある$f(x)$と言う式を軸移動で$(x-a)$を基準にした式に変換したものと言えるだろう。

なぜ、こんな必要があるのかなのだが、実関数の場合には、上述の(4)のように簡単な式を複雑化するようなこんな変換の必要性は薄いのかも知れないのだが、複素関数の場合には、複素関数 z をある点 a からの距離(z-a)で変換する必要性が生じるからだろう。