級数の和を式にする

本屋で高校数学の参考本を立ち読みしていたら、こんなのに出会った。面白いので覚えておいた。

例えばn^2などの級数をどうしたら式に出来るだろうかと言うものである。こんな風にする。

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = \sum_{m=0}^{n}(m+1)^3 - \sum_{m=1}^{n} m^3 = (n+1)^3 \cdots (1)$$

・ Σであるから、次数の大きな式になるだろうことは予測できる。この場合は二乗のΣだから三乗が出てくる答えだろうと推測することになる。

・ そこで、一つ次数の大きなΣを考えるのだが、上記の中間項のようにΣ範囲が異なるものの差を考える。1〜n のものと、0〜n のものがあるのが味噌である。

・ 中間項の答は明らかに、右辺になることは、式からわかる。

$(n+1)^3 = \sum_{m=0}^{n}(m^3 + 3m^2 + 3m + 1) - \sum_{m=1}^{n} m^3$ である。

さらに、$\sum_{m=0}^{n} m^3 = \sum_{m=1}^{n} m^3 \quad \sum_{m=0}^{n} m^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2 \quad \sum_{m=0}^{n} m = \sum_{m=1}^{n} m$ であるので、不要なものを消去する。一見違うものが消去されてしまう。

後は機械的に整理するだけである。

$$(n+1)^3 = 3\sum_{m=1}^{n}(m^2 + m) + \sum_{m=0}^{n} 1 = 3\sum_{m=1}^{n} m^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right\} = \frac{(n+1)}{6}\left\{2(n+1)^2 - 3n - 2\right\} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdots (2)$ のような式が求まる。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

遊びとしては少々面白い。

こんな風にしてn, n^2, n^3などの和の式でも予め作成しておけば便利かも知れないのだが、用途もないだろうからやっていない。