

x^n の微分は？

この微分は n が自然数ならば、帰納法やテーラー展開などでも簡単に証明できる。ところが、有理数・無理数となるとちょっと複雑になってくる。本などでも示されていることは意外に少ない。基本部分での意外な落とし穴である。

- (1) 今 n が自然数の場合はわかっていることとして $y = x^{\frac{p}{q}}$ (p は自然数、 q は整数) として証明を追求してみよう。こんな風にするのは、こうすれば少なくとも有理数は証明できるからである（無理数の場合は証明できない）。ただ、この方法も、極限值や微分というものを完全に理解していないと、下記のような数式だけのいじりでの証明を完全に納得することはできないように思われる。これを变形して行く。

$$y = x^{\frac{p}{q}} \rightarrow y^q = x^p \rightarrow \frac{d}{dx}(y^q) = \frac{d}{dx}(x^p) \rightarrow \frac{d}{dy}(y^q) \frac{dy}{dx} = px^{p-1} \rightarrow qy^{q-1} \frac{dy}{dx} = px^{p-1} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{\frac{y^q}{y}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{\frac{x^p}{x^{\frac{p}{q}}}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}x^{\frac{p}{q}}}{x^p} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

となり、 $p/q=n$ とすれば、少なくとも有理数に対しても成立することがわかる。

- (2) ただ、無理数に対してどうなるのかは、これでは証明出来ないのだが、どんな無理数でも無限の桁数の極限まで有理数に近づけることを考えれば、無理数に対してもこれが成立するだろうことはまず、推察できる。

既に n を有理数としての $y = x^n$ は上記で証明されている。 n より α だけ大きな有理数があり、 n より Δn 大きな有理数との間に挟み込まれていると考えよう。もし、双方の微分の値が $\Delta n \rightarrow 0$ により一致するならば、その間の無理数に対しても微分が成立することは理解できる。

$nx^{n-1} < \alpha < (n+\Delta n)x^{(n+\Delta n)-1}$ において両端の値が同じになるならば、無理数でも成立するとしてよいだろう。不等号は逆の場合もあるかも知れないが、それはどうでもよい。

$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} (n+\Delta n)x^{(n+\Delta n)-1} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} (nx^{(n+\Delta n)-1} + \Delta nx^{(n+\Delta n)-1}) = nx^{n-1}$ であるから、両辺が同じになり挟み込まれた無理数でも成立するとしてよいだろう。

- (3) ここで $y = x^n$ として n の制約なしに進めてみよう。両辺の $\log$ を採ることにより進める。そもそも $\log$ は底が無理数なのだから、ここで有理数も無理数もなくなるはずである。

$$\log y = \log x^n \quad \text{両辺を } x \text{ で微分すると、} \quad \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(\log x^n) \rightarrow \frac{d}{dy}(\log y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(n \log x) \rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = n \frac{1}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = n \frac{y}{x} = n \frac{x^n}{x} = nx^{n-1} \quad \text{となる。}$$

ここで n には何の制約もないので無理数についても成立することになる。

なぜ、log ならばこんなことが出来るのかを考えてみる意味はあるだろう。log の底は無理数である (2.81828・・・)、有理数であろうが何だろうが無限桁の近似でもして無理数化してしまうので、こんな操作が可能になるのだろうと理解せざるを得ないのだが、これ以上はわからない。無理数も有理数も無限大の数があるのだが、無理数は有理数より無限大多いのはご存じだろう。無限大の次元違いである。証明は忘れてしまった。

- (4) dy/dx などであるが、上記では機械的に操作し $\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dy}(\log y) \frac{dy}{dx}$ などとしている。いろいろなところで出てくる操作なのだが、変に考えることなく単純に「 dy/dx は微小区間における dy と dx の比」と考えておけば、こんな操作やどんな操作も素直に理解できるのではないだろうか。
- (5) 大学の数学科ならいざしらず、高校や数学以外の専門では余程の学生でもない限り、こんなことをやっている暇はないだろうし、理系の一般的な先生すらこんなことを考えずに一生を通過してしまう人も多いだろう。でも、こんなことに疑問を持ち突破している人だけが、深く進めるのではないかと思う。